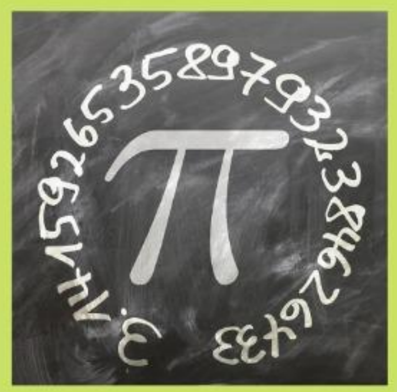
EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

CÁLCULO INTEGRAL

CUADERNILLO para el estudiante



ASESORÍA ACADÉMICA

QUINTO SEMESTRE

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

Créditos

Desarrollo de Contenido

Damián Chávez Díaz

José Luis Santiago Hernández

José Omar Guerrero Hernández

Juan Alfredo Alonso Núñez

Luis Miguel Morales

Revisión técnico – pedagógica

Arit Furiati Orta

Itandehui García Flores

Judith Doris Bautista Velasco

Primera edición

Septiembre 2020

México

Introducción

El cuadernillo de Asesorías Académicas de la asignatura de Cálculo Integral, forma parte de una colección de recursos de apoyo para jóvenes estudiantes de los Centros de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA), Centros de Bachillerato Tecnológico Forestal (CBTF), Centros de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales (CETAC), Centros de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMAR), los cuales tienen el propósito de ofrecerte elementos para lograr los aprendizajes requeridos y favorecer tu desarrollo académico.

En la primera sección hay aspectos relacionados con la Asesoría Académica que te permitirán ubicarla como elemento de apoyo a tu trayectoria académica.

En la segunda sección te mostramos actividades que te ayudarán a ubicar tus áreas de oportunidad, partiendo de la recuperación de tus aprendizajes; así mismo, podrás reforzar aspectos conceptuales que faciliten la comprensión del contenido disciplinar, y a la vez, se convierten en apoyo para promover la comprensión lectora y habilidad matemática promoviendo el desarrollo de tu perspectiva crítica.

Encontrarás actividades de reflexión, análisis, lecturas, ejercicios, juegos, problemas a resolver, entre otras, que te permitirán construir aprendizajes y contribuir al desarrollo de habilidades del pensamiento, de modo que puedas comprender que el cálculo integral es una herramienta matemática que te permite actuar de manera creativa, reflexiva, razonada y razonable, en el tratamiento y cuestionamiento de situaciones del entorno, así como en la toma de decisiones durante el abordaje de las mismas.

Esperamos que este material constituya una herramienta valiosa para tu formación y sea útil para apoyar tu proceso de aprendizaje del cálculo integral de manera creativa. Te recomendamos que el cuadernillo sea revisado de forma secuencial, ya que para lograr una adecuada comprensión de los contenidos abordados no te aconsejamos revisarlos de forma aislada o aleatoria, sino en el orden propuesto.

La Asesoría Académica

La asesoría académica es un servicio a través del cual encontrarás apoyo para favorecer el logro de tus aprendizajes. Se brinda mediante sesiones de estudio adicionales a la carga horaria reglamentaria y se te apoya para despejar dudas sobre temas específicos. También se te recomiendan materiales adicionales (bibliografía complementaria, ejercicios, resúmenes, tutoriales, páginas web, entre otros), de los que podrás apoyarte para el estudio independiente y evitar el rezago académico.

La asesoría académica puede ser:

a) Preventiva: acciones con los alumnos que tienen bajo aprovechamiento académico, han reprobado evaluaciones parciales o no lograron comprender algún contenido curricular, y que requieren apoyo para adquirir o reforzar aprendizajes específicos de alguna asignatura, módulo o submódulo. Consiste en lograr que el alumno mejore la calidad de sus aprendizajes, incremente su rendimiento académico y evite la reprobación.

b) Remedial: son acciones con los alumnos que al finalizar el semestre han reprobado alguna asignatura, módulo o submódulo y requieren apoyo académico para mejorar los aprendizajes frente a las evaluaciones extraordinarias y en general para alcanzar los aprendizajes establecidos en el programa de estudios correspondiente. Su propósito es que los alumnos regularicen su situación académica y eviten el abandono escolar.

Índice temático

Estructura didáctica

Cada lección se estructura por las siguientes secciones:

Explorando

Sección dirigida a reconocer tu nivel de conocimiento sobre la temática a abordar, puede contener preguntas abiertas, reactivos de opción múltiple ejercicios, actividades, entre otros. Apoya en la detección de las necesidades formativas de los estudiantes, lo que permitirá tomar decisiones sobre las actividades de asesoría que se pueden desarrollar.

Comprendiendo

Se trabaja con lecturas que brindan elementos para la comprensión de los contenidos (temáticas) que se abordan en la asesoría académica y promueve la habilidad matemática y comprensión lectora, constituye un elemento para el estudio

Practicando

Promueve la ejercitación e integración de contenidos que se abordan en la lección. Refiere el desarrollo de estrategias centradas en el aprendizaje (elementos didácticos para brindar orientaciones a partir de ejercicios como resolución de problemas, dilemas, casos prácticos.). Permite poner en práctica lo revisado en la sección de habilidad lectora y facilita el aprendizaje de los contenidos temáticos.

Auto evaluación

Aporta elementos para que te autoevalúes y tomen junto con tu asesor académico medidas oportunas para continuar con tu proceso de aprendizaje.

Investigando

Se te proporcionan recomendaciones sobre recursos de apoyo y material centrado en áreas específicas, para fortalecer la temática estudiada.

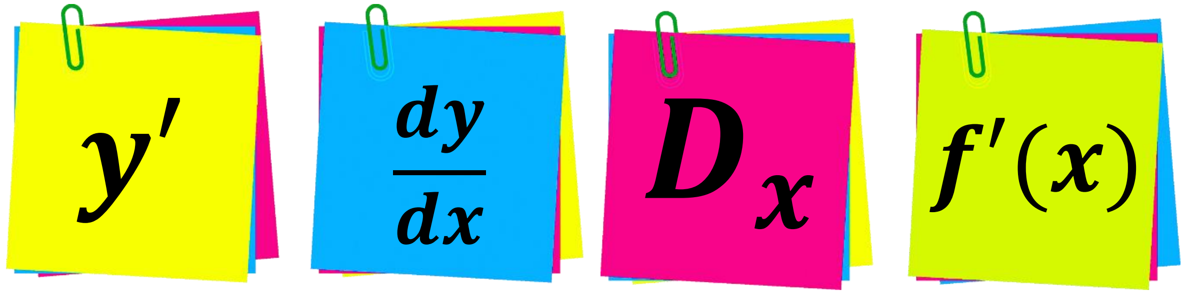
Lección 1. ¿Te acuerdas de derivar?

Explorando

Relaciona ambas columnas, escribiendo en el paréntesis de la derecha, la letra de la definición que se asocia con su respectivo concepto.

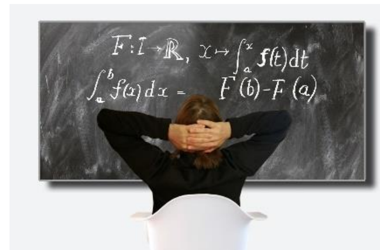
A	Valor aproximado al que tiende una variable, a medida que se acerca a un punto.	( )	**Derivada**
B	Función en la cual alguna de las variables tiene exponentes fraccionarios o se encuentra bajo signo radical.	( )	**Funciones Trascendentes**
C	Variable a la que se le asignan valores a voluntad, dentro de los límites que señale el problema en particular.	( )	**Función Racional**
D	Pendiente de la recta tangente en un punto determinado de una función; también se le asocia con una razón de cambio.	( )	**Variable Independiente**
E	Relación entre elementos de dos conjuntos, donde la correspondencia es de uno a uno.	( )	**Límite**
F	Funciones donde la variable independiente figura como exponente o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los que emplea la trigonometría.	( )	**Función Irracional**
G	Función que se escribe como el cociente de dos polinomios, y el divisor no puede ser el polinomio cero.	( )	**Función**

Encierra en un círculo la simbología que reconozcas y que recuerdes haber utilizado en tu curso de Cálculo Diferencial para denotar a la derivada:



Comprendiendo

Recordando cómo derivar



Lo primero que debemos recordar, es que una función hace referencia a un tipo de relación matemática donde existe una regla de correspondencia de 1 a 1 entre dos variables que, generalmente son representadas por x (variable independiente) y y (variable dependiente), donde por cada valor asignado a la *variable independiente*, la *variable dependiente* obtiene un único valor en correspondencia.

Por otra parte, es preciso retomar que las funciones pueden denotarse de diferentes formas, y que seguramente ya te resultan muy familiar, por ejemplo:

$$y = 5x^2 - \frac{3}{7} \qquad f(x) = -4\tan 8x \qquad g(x) = 9^{6x+1}$$

Pero pasando al punto central de esta lección, vale la pena recordar que la derivada puede definirse, entre otras de sus interpretaciones, como la razón de cambio instantáneo que

ocurre entre dos variables, en este caso, las variables x y y, en un punto específico o como la pendiente de la recta tangente en un punto determinado de una función; también se le asocia con una razón de cambio; y que gracias a ella es posible atender situaciones de la vida cotidiana asociadas con problemas de rapidez, velocidad instantánea, variación instantánea, la concentración de una mezcla o incluso, situaciones de variación en la bolsa de valores, por mencionar algunos ejemplos. De ahí la importancia de su estudio y aprendizaje, ya que es posible aplicar efectivamente *las matemáticas* en un sinfín de posibilidades.

Pasando ahora a las formas de notación, cuando deseamos determinar la derivada de una función, la notación más común es como y', la cual se lee como *"ye prima"*, o también como $f'(x)$, leída como *"efe prima de equis"*, las cuales fueron propuestas por el matemático italiano **Joseph-Louis Lagrange**, y que seguramente fue la más popular en tu curso de Cálculo Diferencial.

No obstante, existe otra notación propuesta por el matemático alemán **Gottfried Leibniz**, y que en el estudio del Cálculo Integral adquiere mucha relevancia; nos referimos al cociente:

$$\frac{dy}{dx}$$

La cual se lee como *"derivada de ye, respecto a equis"*, y que puede adecuarse de acuerdo a la función sobre la cual se va a determinar la derivada. Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = -3x^5$ y queremos indicar la derivada de la misma utilizando esta notación, entonces habría que escribirla como $\frac{df}{dx}$, o bien, como $\frac{d}{dx}f(x)$ que también es equivalente.

Entrando en materia sobre cómo determinar la derivada de una función, vamos a realizarlo por medio de fórmulas de derivación directa, con énfasis en la atención de funciones algebraicas elementales.

Para ello, utilizaremos el siguiente formulario asumiendo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ son constantes que pertenecen al conjunto de los números Reales $(\mathbb{R})$, y contemplando que $\boldsymbol{n \neq 1}$; además de considerar que $\boldsymbol{u}$ hace referencia a un multinomio, es decir, a una expresión de varios términos, o a la suma de varias funciones.

Formulario básico para derivar funciones Algebraicas		
1	$y = a$	$y' = 0$
2	$y = ax$	$y' = a$
3	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$ para $n \neq 1$
4	$y = u$	$y' = u'(derivada\ de\ cada\ término)$
5	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

Veamos algunos ejemplos para cada fórmula:

Fórmula 1: Si $\boldsymbol{y = a}$ entonces $\boldsymbol{y' = 0}$

Esta fórmula es la más sencilla de todas, y hace referencia a que, si nuestra función corresponde a una constante, entonces su derivada es cero. Revisemos los siguientes ejemplos ilustrativos sobre este caso:

Formula: $\boldsymbol{y = a}$	$\boldsymbol{derivada = y' = 0}$
Ejercicio	**Solución**
$\boldsymbol{y = 6}$	$\boldsymbol{y'} = 0$
$\boldsymbol{y = -\frac{2}{7}}$	$\boldsymbol{y'} = 0$
$\boldsymbol{y = 8.3}$	$\boldsymbol{y'} = 0$

Fórmula 2: Si $\boldsymbol{y = ax}$ entonces $\boldsymbol{y' = a}$

Esta fórmula se va a utilizar para los casos en que la variable independiente, comúnmente denotada por $\boldsymbol{x}$, tenga exponente 1 (positivo); y aunque no se escriba explícitamente, habrá que tomar en cuenta esta referencia para poder identificar que entonces la expresión a derivar, pueda derivarse mediante esta fórmula.

Asimismo, de acuerdo con la regla que nos presenta esta fórmula, es posible asumir que el resultado de la derivada para una función de esta forma, corresponderá al valor (la constante) que acompaña a la variable como coeficiente. Pero veamos los siguientes ejemplos ilustrativos para mayor claridad:

$y = ax \qquad y' = x$	
Ejercicio	**Solución**
$y = \frac{5}{2}x$	$y' = \frac{5}{2}$
$y = x$	$y' = 1$
$y = -13x$	$y' = -13$

Fórmula 3: Si $y = x^n$ entonces $y' = n \cdot x^{n-1}$ considerando que $n \neq 1$ (se lee n diferente de 1)

Antes de revisar los ejemplos correspondientes para el empleo de esta fórmula, es necesario recordar algunos ajustes o acomodos que tenemos que efectuar en las funciones, previo a determinar su derivada; considerando estas propiedades de los exponentes y radicales, respectivamente:

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

Por otra parte, el hecho de que se haya hecho énfasis en que n sea diferente de 1 para usar esta fórmula, es porque si así fuera, recuerda que entonces la fórmula a utilizar es la número 2. Por lo que el indicador para saber que ha de utilizarse esta fórmula para derivar, es que la variable se encuentre elevada a una potencia cualquiera, diferente de 1.

Sin más preámbulo, veamos algunos ejemplos:

$y = x^n \qquad y' = n \cdot x^{n-1}$	
Ejercicio	**Solución**
$y = x^4$ *Vemos que la variable se encuentra elevada a una potencia diferente de 1, y entonces es correcto utilizar la* ***Fórmula 3****.*	$y' = 4x^{4-1}$ *De acuerdo con la fórmula, "bajamos" el exponente a lado de la variable, y restamos* ***1*** *al exponente, obteniendo como resultado:* $\boxed{y' = 4x^3}$
$y = 6x^2$ *Si existe una constante antes de la variable, pasa directamente al resultado a multiplicar.*	$y' = 6 \cdot 2x^{2-1}$ *En este caso, una vez que pasamos la constante* 6 *directamente al resultado, "bajamos" el exponente a lado de la variable, el cual multiplicará a la constante* 6*; y de igual manera al caso anterior, restamos* ***1*** *al exponente para llegar a:*

	$\boldsymbol{y' = 12x}$
$\boldsymbol{y = -\frac{5}{x^7}}$ $\boldsymbol{y = -5x^{-7}}$ *Se aplica la propiedad revisada sobre los exponentes, para colocar la variable a nivel de numerador y proceder a utilizar la fórmula.*	$y' = -5 \cdot -7x^{-7-1}$ *De manera similar al ejemplo anterior, una vez que pasamos la constante -5 directamente al resultado, "bajamos" el exponente a lado de la variable, el cual multiplicará a la constante -5; y de igual manera al caso anterior, restamos **1** al exponente. Teniendo como resultado preliminar:* $y' = 35x^{-8}$ *Como es necesario dejar el resultado con exponentes positivos, entonces utilizamos la misma propiedad de los exponentes que implementamos al inicio para "acomodar" la función y proceder a derivar. Llegando así a nuestro resultado final:* $\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{35}{x^8}}}$
$\boldsymbol{y = 8\sqrt[3]{x^2}}$ $\boldsymbol{y = 8x^{2/3}}$ *Se aplica la propiedad revisada sobre los radicales, para modificar la estructura de la función y utilizar la fórmula con el exponente $\boldsymbol{n}$ apropiado.*	$y' = 8 \cdot \frac{4}{3}x^{2/3-1}$ *Pasamos la constante $\mathbf{8}$ directamente al resultado, "bajamos" el exponente a lado de la variable para que multiplique a la constante y restamos **1** al exponente. Teniendo como resultado preliminar* $y' = \frac{32}{3}x^{-1/3}$ *Utilizamos la propiedad de los exponentes para que nuestro exponente sea positivo:* $y' = \frac{32}{3x^{1/3}}$ *Y para llegar al resultado final, es necesario aplicar la propiedad de los radicales para regresar a raíz, ya que nuestro ejercicio corresponde a una función con raíz:* $\boxed{\boldsymbol{y' = \frac{32}{3\sqrt[3]{x}}}}$

Fórmula 4: Si $y = u$ entonces $y' = derivada\ de\ cada\ término$

En esta fórmula, la variable u hace referencia para cuando la función corresponde a una expresión algebraica de varios términos. En dicha situación, la derivada corresponderá a determinar la derivada para cada uno de los términos en cuestión, empleando las **Fórmulas 1, 2** y **3**, e implementando las propiedades de los exponentes y/o de los radicales según sea el caso y la necesidad.

Veamos los siguientes ejemplos:

$función: y = x^n \quad derivada = y' = n \cdot x^{n-1}$ $función: y = x^n \quad derivada = y' = n \cdot x^{n-1}$	
Ejercicio	**Solución**
$y = 9x^2 - \frac{1}{7}x + 3$ *Las fórmulas requeridas para derivar cada término son: 3, 2 y 1 respectivamente.*	$y' = 9 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{7}$ *Observa cómo para el primer término se aplica la **Fórmula 3**, para el segundo término: $-\frac{1}{7}x$ se emplea la **Fórmula 2**, y para el tercer término que corresponde a la constante 3, se utiliza la **Fórmula 1**, llegando así al resultado:* $\boxed{y' = 18x - \frac{1}{7}}$
$y = \frac{4}{3x^5} + \frac{1}{x}$ $y = \frac{4}{3}x^{-5} + x^{-1}$ *Se aplica la propiedad de los exponentes, para colocar la variable a nivel de numerador y proceder a derivar.*	$y' = \frac{4}{5} \cdot -5x^{-5-1} - 1x^{-1-1}$ *Para derivar ambos términos, dado que la variable presenta una potencia diferente de 1, entonces se emplea la **Fórmula 3**, llegando al resultado preliminar de:* $y' = -\frac{20}{3}x^{-6} - 1x^{-2}$ *Aplicamos la misma propiedad de los exponentes, para que el resultado tenga exponentes positivos y así finalizar:* $\boxed{y' = -\frac{20}{3x^6} - \frac{1}{x^2}}$
$y = -\sqrt{x} + 8$ $y = -x^{1/2} + 8$ *Se aplica la propiedad de los radicales en el primer término, para*	$y' = -\frac{1}{2}x^{1/2-1} + 0$ *Observa cómo para el primer término se aplica la **Fórmula 3**, y para el segundo término que corresponde a la constante 8, se utiliza la*

modificar su estructura y pueda adecuarse el empleo de alguna de las fórmulas ya revisadas.	***Fórmula 1**, llegando así al resultado preliminar de:* $$y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$$ *Se aplica la propiedad de los exponentes para que la variable termine con exponente positivo:* $$y' = -\frac{1}{2x^{1/2}}$$ *Y para llegar al resultado final, es necesario aplicar la propiedad de los radicales para regresar a raíz, puesto que la función que se derivó inicio en raíz:* $$\boxed{\boldsymbol{y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

Fórmula 5: Si $\boldsymbol{y = u^n}$ entonces $\boldsymbol{y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'}$

De igual forma que en la fórmula anterior, la variable $\boldsymbol{u}$ continuará haciendo referencia a una expresión algebraica de varios términos, pero en esta ocasión, dicha expresión se encontrará afectada por una potencia $\boldsymbol{n}$ diferente de 1, siendo este nuestro principal indicador para deducir que esta será la fórmula adecuada a utilizar para obtener la derivada de la función.

Asimismo, no debemos olvidar el uso de las propiedades tanto de los exponentes como de los radicales, las cuales hemos utilizado con frecuencia en los ejemplos previos.

Pasemos ahora así con los siguientes ejemplos:

Función: $y = u^n$ $\quad$ $derivada = \; y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	
Ejercicio	**Solución**
$$y = \left(\frac{7}{2}x - 1\right)^4$$ *Considera que:* $u = \frac{7}{2}x - 1$ *Y, por tanto:* $u' = \frac{7}{2}$	*De acuerdo con la estructura de la fórmula, "bajamos" el exponente a lado de nuestra expresión* u, *restamos 1 al exponente e indicamos la multiplicación por* u': $$y' = 4 \cdot \left(\frac{7}{2}x - 1\right)^{4-1} \cdot \frac{7}{2}$$ *Posteriormente procedemos a realizar operaciones pendientes. Que en este caso y en todos, va a corresponder a multiplicar los factores "extremos" de* u, *que en este caso corresponden a* 4 *y* $7/2$, *y a efectuar la resta en el exponente. Llegando así al resultado final:* $$\boxed{y' = 14\left(\frac{7}{2}x - 1\right)^3}$$
$$y = -\frac{3}{(2x^2+5)^3}$$ *Aplicamos la propiedad de los exponentes para acomodar la estructura:* $$y = -3(2x^2+5)^{-3}$$ *Considera que:* $u = 2x^2 + 5$ *Y, por tanto:* $u' = 4x$	*Observa que la constante* -3 *pasa directa al resultado, de acuerdo con la fórmula, se "baja" el exponente a lado de* u, *restamos 1 en el exponente e indicamos el producto con* u': $$y' = -3 \cdot -3(2x^2+5)^{-3-1} \cdot 4x$$ *Realizamos multiplicación de los factores "extremos" de* u *y la resta en el exponente, para así llegar al resultado preliminar:* $$y' = 36x \cdot (2x^2+5)^{-4}$$ *Y por último aplicamos la propiedad correspondiente de los exponentes, para que el resultado tenga exponente positivo:* $$\boxed{y' = -\frac{36x}{(2x^2+5)^4}}$$
$$y = \sqrt[3]{(x^6-9)^4}$$ *Aplicamos la propiedad de los radicales para acomodar la estructura de la función:* $$y = (x^6-9)^{4/3}$$	*La constante* $4/3$ *pasa directa al resultado, de acuerdo con la fórmula, se "baja" el exponente a lado de* u, *restamos 1 en el exponente e indicamos el producto con* u': $$y' = \frac{4}{3} \cdot (x^6-9)^{4/3-1} \cdot 6x^5$$

Considera que: $\boldsymbol{u = x^6 - 9}$ *Y, por tanto:* $\boldsymbol{u' = 6x^5}$	*Realizamos multiplicación de los factores "extremos" de* $\mathbf{u}$ *y la resta en el exponente, para así llegar al resultado preliminar:* $$\boldsymbol{y'} = 8x^5(x^6 - 9)^{1/3}$$ *Aplicamos la propiedad de los radicales, para que el resultado termine en raíz, ya que la función inicial comenzó en raíz y observamos que el exponente en forma de fracción, hace posible dicha conversión:* $$\boxed{\boldsymbol{y' = 8x^5 \sqrt[3]{x^6 - 9}}}$$

Practicando

Resuelve las siguientes derivadas por medio de las fórmulas directas revisadas y utilizando la notación y'.

1. $\boldsymbol{y} = \frac{3}{2}x^9 - \frac{5}{x^2} + 4x$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

2. $\boldsymbol{y} = 6\sqrt{10 - x^5}$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

3. $\boldsymbol{y} = -\frac{7}{x} - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

4. $\boldsymbol{y} = \frac{9}{(3x^2 + 8)^2}$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

5. $\boldsymbol{y} = x^{3/4} - \frac{5}{7}$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

6. $\boldsymbol{y} = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

7. $\boldsymbol{y} = -6x^7 - 8x^5 + x^3$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

8. $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}x + 1\right)^4}} + 5x$ $\qquad \boldsymbol{y'} =$

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Reconozco las diferentes formas para denotar una derivada.		
Sé utilizar las propiedades de los exponentes y radicales en un proceso de derivación, para lograr que mi resultado tenga exponentes positivos o que se regresa a su forma radical, según sea el caso.		
Puedo derivar funciones algebraicas utilizando las fórmulas directas revisadas en esta lección.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

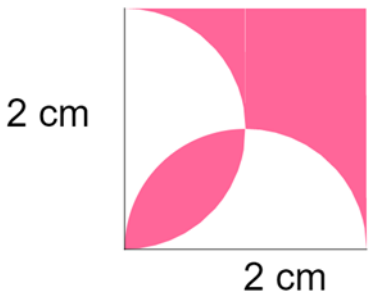
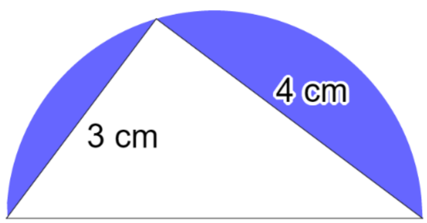
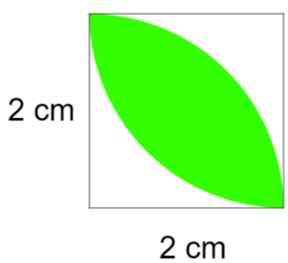
Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Inge Darwin, Reglas de derivación: repaso en 7 minutos con ejemplos, disponible en https://youtu.be/aVNa-J8iB5I
- Khan Academy, Reglas de derivadas: constante, suma, diferencia y múltiplo constante, disponible en: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new#ab-2-6b
- Sangaku Maths, Derivada de una potencia, disponible en: https://www.sangakoo.com/es/temas/derivada-de-una-potencia
- Matemáticas sencillas, La derivada en una taza de café: una aplicación práctica de la vida cotidiana, disponible en: https://youtu.be/sMxlbTVDifo

Lección 2. ¿Qué es la integral?

Explorando

Encuentra el área de las figuras sombreadas. Escribe en la columna de en medio el procedimiento que usaste, y en la columna de la derecha el resultado de tus operaciones.

Figura	Procedimiento	Resultado
		
		
		

Reflexiona y responde las siguientes preguntas:

¿Cuáles fórmulas utilizaste para calcular las áreas del ejercicio anterior?

¿Conoces alguna fórmula para obtener el área de alguna figura delimitada por curvas? Si es así, escribe cuál.

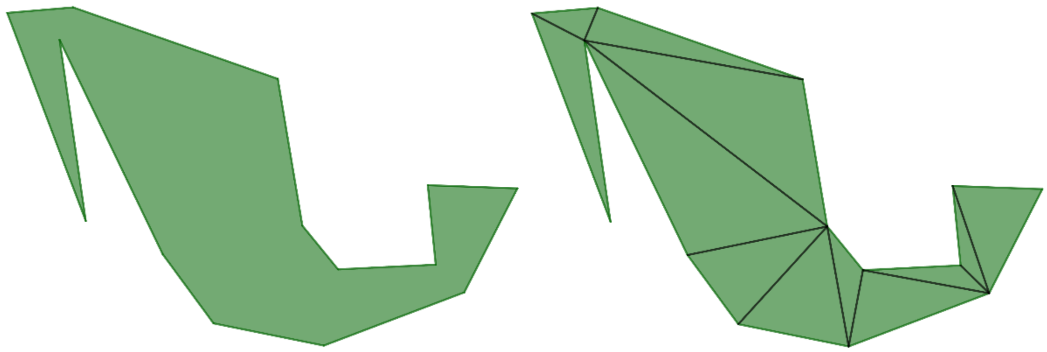
Comprendiendo

¿Qué es la integral?

Para responder a la pregunta "¿Qué es la integral?" primero debemos preguntarnos "¿Qué es el área?" El área es un concepto, físico y matemático, que se define como *la medida de una superficie*. En el sistema internacional de unidades, la unidad de área es $1\ m^2$.

A pesar de tener una definición muy simple, la tarea de encontrar áreas se vuelve muy compleja cuando tenemos la necesidad de tratar con diversos polígonos. Existe una fórmula para calcular el área de un rectángulo, otra para el triángulo, otra para el trapecio y así se extiende una lista muy larga. Para cada figura existe una fórmula distinta y hay que recordarlas todas. ¿No sería más práctico tener una sola fórmula para calcular el área de cualquier polígono?

La fórmula *unitaria* del área no existe, pero aquí va un dato muy útil: todos los polígonos (con un número finito de lados) pueden *subdividirse* en un número finito de triángulos, no importa qué tan irregular sea la figura. En ese entendido, siempre podemos calcular el área de cualquier polígono como la suma de las áreas de los triángulos que lo componen.



Todos los polígonos pueden subdividirse en un número finito de triángulos.

El truco de partir un polígono irregular en triángulos para calcular su área no es una idea nueva en matemáticas. Siempre que sea posible, trataremos de partir un problema grande en varios problemas más pequeños que nos cuesten menos trabajo resolver.

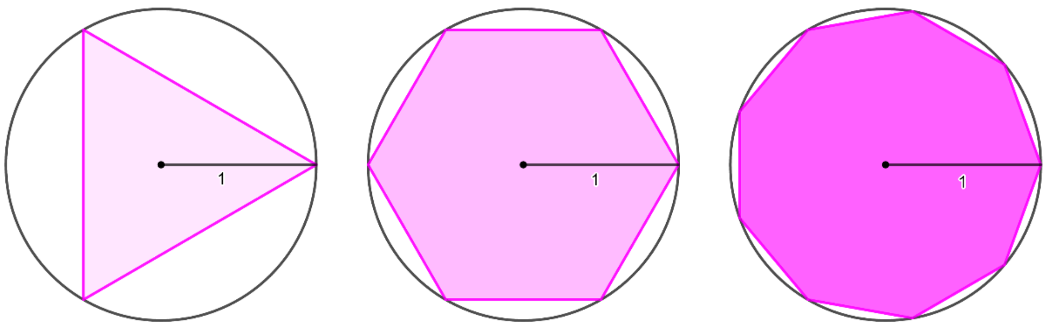
Este truco es muy útil para calcular áreas de figuras delimitadas por lados rectos, sin embargo, surge la necesidad de crear otro método para calcular áreas de figuras delimitadas por *curvas*. Antes de pensar en problemas más sofisticados, pensemos en la curva más familiar de todas: el círculo.

La fórmula para calcular el área de un círculo, si su radio es r, es:

$$\textbf{Área}(\textbf{círculo}) = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r}^2$$

Notaremos la presencia del número "π" en la fórmula anterior. El número π está definido como la razón de la longitud de la circunferencia entre la longitud de su diámetro. Su historia trasciende varios siglos, incluso algunos milenios. En el siglo III a.C., Arquímedes utilizó el *método del agotamiento*, también llamado *método de exhaución*, como una forma de calcular el área de un círculo de radio 1 y, con ello, también calcular π.

El método del agotamiento, para este caso, consiste en inscribir un polígono regular (por ejemplo, un triángulo) dentro del círculo de radio 1. El área del polígono inscrito, que se puede calcular fácilmente, es una aproximación al área del círculo. Una mejor aproximación se obtiene al considerar otro polígono regular inscrito en el círculo que contenga al polígono anterior (por ejemplo, un hexágono). Procediendo de esta forma podemos "agotar" gradualmente toda el área y obtendremos el área del círculo como el límite de las áreas de los polígonos. La idea de este método se ilustra mejor en la siguiente figura.



Primeros tres pasos del método de agotamiento.

Fue hasta el siglo XVII cuando muchas más figuras delimitadas por curvas fueron tratadas exitosamente con el método del agotamiento, como las elipses y las parábolas. Sin embargo, como su nombre lo indica, este método suele ser muy agotador para quien lo calcula. Además, el cálculo del área para cada curva distinta se trataba como un problema particular. Uno de los grandes logros del cálculo fue reemplazar estos procedimientos particulares en un poderoso método general con el siguiente concepto.

El concepto de integral

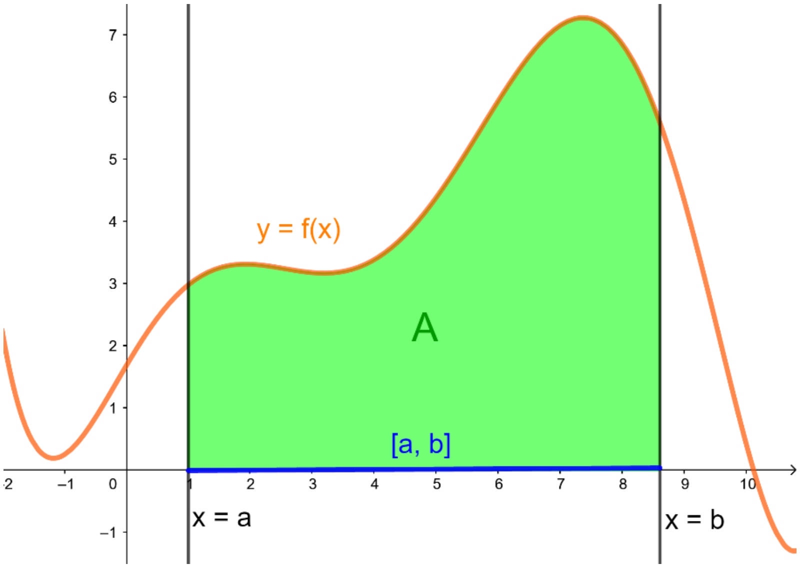
El primer concepto básico del cálculo integral es, precisamente, ***la integral***. Sin embargo, este no es un concepto en sí mismo, sino que su definición se basa en la existencia de otros conceptos y objetos matemáticos. A continuación, analizaremos cada uno de ellos.

Imaginemos dos conjuntos no vacíos: X e Y. Una **función** es *toda relación que asocia a cada elemento del conjunto X con uno y sólo un elemento del conjunto Y.* Nótese que no pedimos necesariamente que X e Y sean conjuntos de números, por lo cual, las siguientes relaciones pueden ser consideradas funciones:

- la relación que asocia a cada persona con su madre biológica,
- la relación que asocia a cada mexicano con su CURP,
- la relación que asocia a cada alumno con su número de control.

Llamaremos **dominio** al conjunto X, y **contradominio** al conjunto Y. Denotamos con la letra "$\boldsymbol{x}$" a cualquier número que pertenezca al dominio X, y usamos la letra "$\boldsymbol{y}$" para denotar a un elemento del contradominio Y. De esta forma, para toda función con dominio X y contradominio Y, cada $\boldsymbol{x}$ está asociado a una y sólo una $\boldsymbol{y}$.

Consideremos una función $\boldsymbol{f(x)}$ definida en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ en el dominio. Podemos definir la integral de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ como el área de la figura delimitada por el eje X, las rectas $\boldsymbol{x = a}$ y $\boldsymbol{x = b}$, y la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x)}$. Para fines prácticos, nos referiremos a esta área con la letra "$\boldsymbol{A}$".

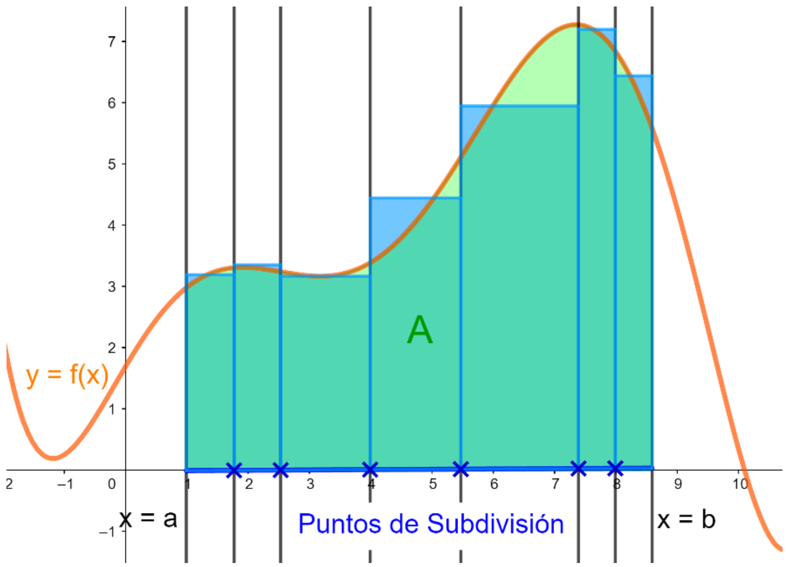


Área delimitada por el eje X, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la gráfica de la función $f(x)$.

¿Recuerdas el truco del que hablábamos al principio de la lección? Consiste en partir un problema grande en problemas suficientemente pequeños para poder resolverlos fácilmente. Bien, pues ahora pondremos en marcha su versión más extrema.

Para encontrar el área bajo la curva que aparece en la ilustración 5, empezaremos por subdividir el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ en un número de pequeños subintervalos (no necesariamente iguales) y trazamos perpendiculares en cada punto de subdivisión. Esto cortará en varias "tiras" a la superficie $\boldsymbol{A}$ que queremos calcular.

Ahora, reemplazamos cada tira por un rectángulo de la misma base cuya altura se escoge en algún lugar entre la altura más grande y la más pequeña de la curva en esa tira. El área de estos rectángulos puede conocerse fácilmente y la suma de las áreas es una buena aproximación al área bajo la curva, es decir, a la integral de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Entre mayor sea el número de rectángulos, mejor será la aproximación al área $\boldsymbol{A}$.



La suma del área de todos los rectángulos de color azul es similar al área de color verde.

Ahora trataré de escribir con la mayor sencillez posible, para que pueda ser entendido. Aunque es incorrecta, voy utilizar la siguiente notación, con el propósito de que la idea del cálculo del área $\boldsymbol{A}$ sea entendible.

$$\boldsymbol{A} \approx \sum \textbf{Área}(\textbf{rectángulos})$$

Con estos símbolos quiero decir que el área $\boldsymbol{A}$ es aproximadamente igual $(\approx)$ a la suma $(\boldsymbol{\Sigma})$ de las áreas de los rectángulos. Si además utilizo a la letra "$\boldsymbol{n}$" para señalar el número de rectángulos de subdivisión del intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, puedo escribir entonces:

$$\boldsymbol{A} = \lim_{n\to\infty} \sum \textbf{Área}(\textbf{rectángulos})$$

Es decir, el área $\boldsymbol{A}$ es igual al límite de las sumas de las áreas de los rectángulos, cuando el número de rectángulos es cada vez mayor (es decir, "$\boldsymbol{n}$" tiende al infinito). Si el límite existe, utilizamos los siguientes símbolos para denotar al valor del área bajo la curva, también llamada "la integral de la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$".

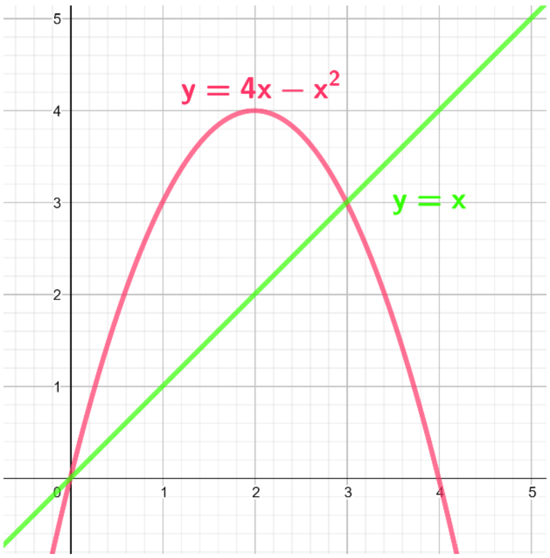
$$\boldsymbol{A} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \lim_{n\to\infty} \sum \textbf{Área}(\textbf{rectángulos})$$

Gottfried Leibniz es el autor de la notación "$\int \cdot\, \boldsymbol{dx}$", la cual hace referencia a una "s" alargada, que viene de la palabra "suma". Leibniz fue también quien llamó "integrales" por primera vez a estos límites. Para el ejemplo que mostré, utilicé una función desconocida, pero existen varias reglas y procedimientos generales para obtener las áreas bajo la curva de las diversas funciones que podemos integrar, pero eso será abordado en próximas lecciones.

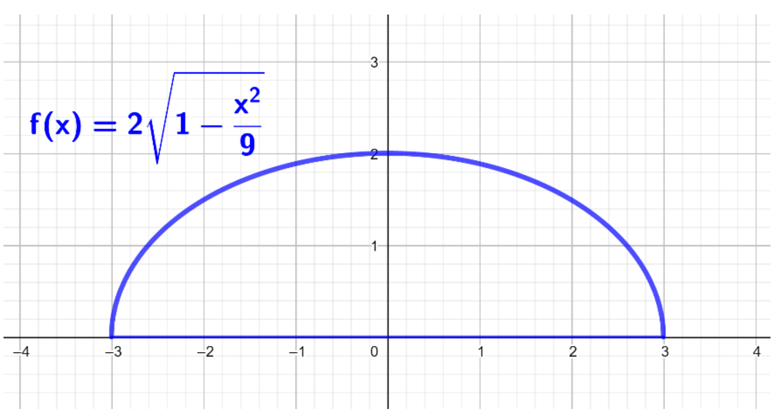
Por ahora, lo importante es conocer la definición de una integral como un "proceso límite". Es decir, un procedimiento de refinamiento en el que en cada paso, vamos mejorando la exactitud de nuestros cálculos.

Practicando

Explica un método para hallar el área delimitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y la recta $y = x$ que aparecen en la siguiente imagen.



¿Cuál es el valor del área de la mitad de una elipse? Considera la gráfica de la función $f(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, que traza la parte superior de la elipse que se muestra en la figura de abajo. Intenta encontrar la mejor aproximación a esta área utilizando una sucesión de figuras geométricas inscritas en la curva.



Explica en qué consiste el método de exhaución para calcular el área de figuras delimitadas por curvas.

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Comprendo que el método de agotamiento o de exhaución es una forma aproximada para calcular el área de figuras curvas		
Puedo calcular de manera aproximada, el área bajo una función mediante el trazo de rectángulos y la sumatoria de las áreas de cada uno de ellos		
Entiendo el concepto de integral, desde un enfoque geométrico, como el área bajo la curva asociada a una función, y delimitada por un intervalo específico.		
Identificó la notación que hace referencia a una integral		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy en español. Introducción al cálculo integral. Disponible en: https://youtu.be/WA_A1ljmocQ
- Superprof.es. Integración definida. Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integral-definida.html

Lección 3. Los rectángulos sirven para calcular

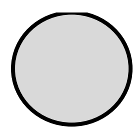
Explorando

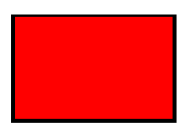
Contesta las siguientes preguntas.

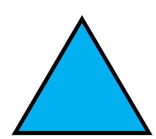
1. ¿Recuerdas la definición de una línea curva? Escríbela.

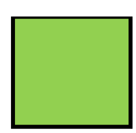
2. ¿Cuál es el concepto de área?

3. Relaciona las fórmulas de área de la izquierda con las figuras geométricas de la derecha:

a) $A = \frac{b \ x \ h}{2}$ ( ) 

b) $A = l \ x \ l$ ( ) 

c) $A = b \ x \ h$ ( ) 

d) $A = \pi \ x \ r^2$ ( ) 

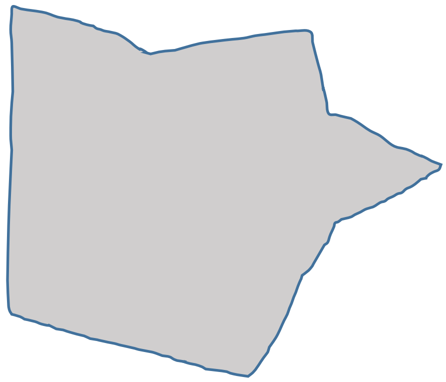
Comprendiendo

Cálculo de área de superficies geométricas no regulares

En matemáticas la definición de área es el espacio dentro de una figura, su unidad de medida son las unidades cuadradas.

El cálculo del área de superficies geométricas no regulares es una actividad muy común en algunos ámbitos de la vida cotidiana, por ejemplo en el sector agrícola al realizar estimaciones para la siembra de terrenos o parcelas de cultivos o en el ámbito de la construcción para determinar las cantidades de materiales como pintura, cemento, loseta, entre otros. Por ello es importante saber cómo calcular el área de superficies geométricas no regulares.

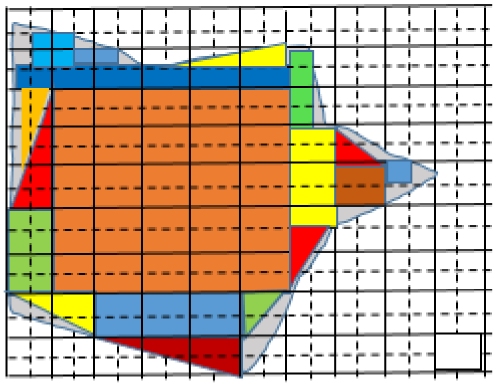
A continuación te mostraremos cómo medir el área aproximada de la siguiente figura:



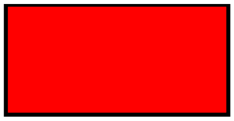
1. Dibuja la figura a escala dentro de una hoja cuadriculada.

2. Traza figuras geométricas regulares dentro de la cuadricula, de manera que toda la superficie quede dividida en distintas figuras (preferentemente emplea triángulos, rectángulos y cuadrados)

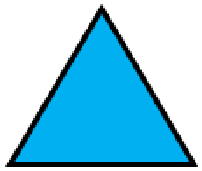
En este caso la medida de los cuadros será de 1m por lado. Pero tú puedes definir la escala.



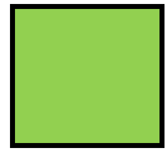
3. Empieza a calcular el área de las figuras trazadas al interior de la superficie irregular.



$$A = b \ x \ h$$



$$A = \frac{b \ x \ h}{2}$$



A= l x l

$$1m \ x \ 1m \ = \ 1m^2$$

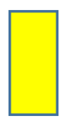
$$\frac{0.75m \ x \ 2m}{2} = \frac{1.5m^2}{2} = 0.75 \ m^2$$

$1m \ x \ 0.5m = 0.5m^2$

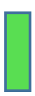
$$\frac{1m \ x \ 3m}{2} = \frac{3m^2}{2} = 1.75 \ m^2$$

$$\frac{2m \ x \ 0.5m}{2} = \frac{1m^2}{2} = 0.5 \ m^2$$

$6m \ x \ 0.5m = 3 \ m^2$



$1m \ x \ 2.5m = 2.5m^2$

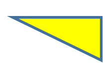


$0.5 \ m \ x \ 2 \ m = 1m^2$

$$\frac{1m \ x \ 1m}{2} = \frac{1m^2}{2} = 0.5 \ m^2$$

$5 \ m \ x \ 5 \ m = 25m^2$

$$\frac{1m \ x \ 1.5m}{2} = \frac{1.5m^2}{2} = 0.75 \ m^2$$



$$\frac{2m \ x \ 1m}{2} = \frac{2m^2}{2} = 1 \ m^2$$

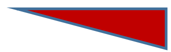
$1 \ m \ x \ 1 \ m = 1m^2$

$3\ m \times 1\ m = 3m^2$

$0.5m \times 0.5m = 0.25m^2$

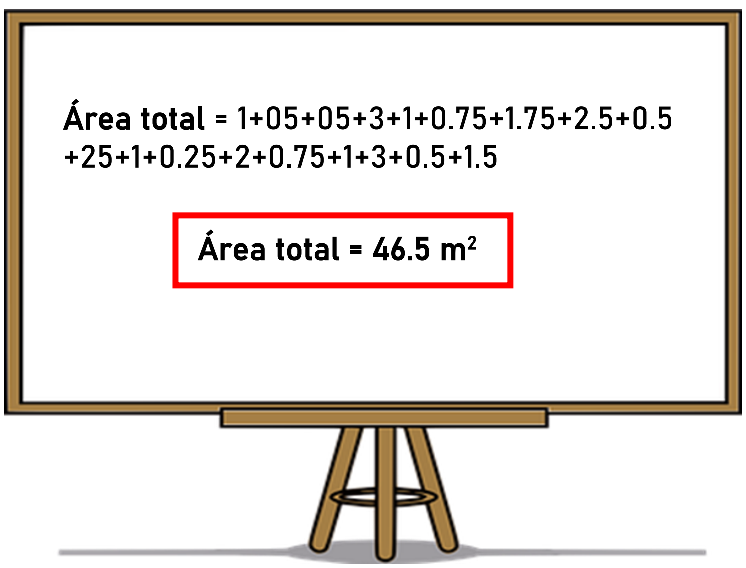
$$\frac{1m \times 1m}{2} = \frac{1m^2}{2} = 0.5\ m^2$$

$1m \times 2m = 2m^2$



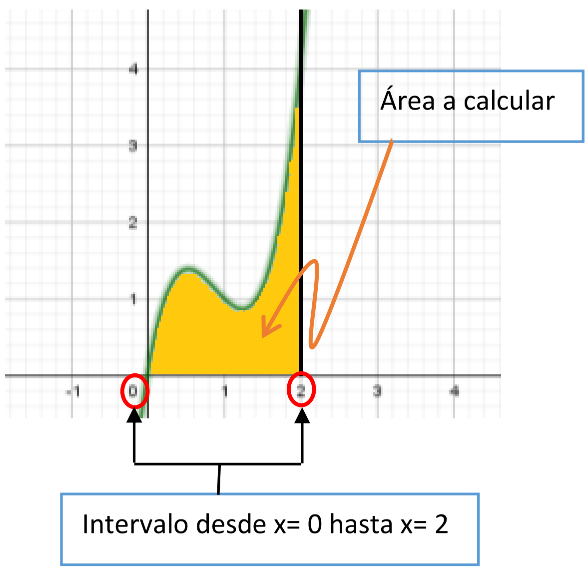
$$\frac{3m \times 1m}{2} = \frac{3m^2}{2} = 1.5\ m^2$$

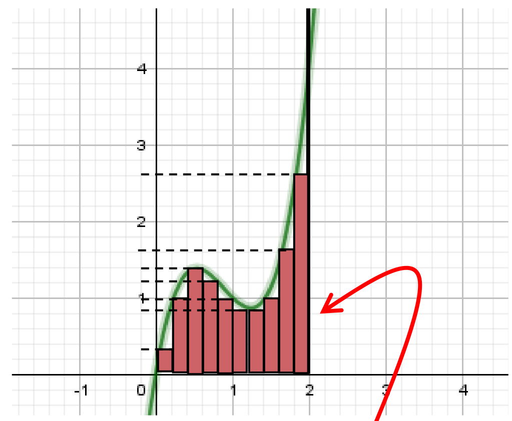
4. Suma todas las áreas para encontrar el área total. El área será aproximada ya que quedarán algunas partes en las que no se podrá trazar alguna figura regular.



Ahora una vez que recordamos como calcular áreas de figuras irregulares, vamos a ver que con el uso de rectángulos es mucho más fácil el cálculo de áreas bajo una curva, recuerda en calculo diferencial graficaste funciones y observaste que en algunos casos la gráfica daba origen a una curva, pues bien vamos a dibujar rectángulos para calcular el área bajo una curva con límites a derecha e izquierda denominado intervalo [a, b] y limitado con el eje de la abscisa (eje “x”).

Para calcular el área bajo la curva de la función **$y=6x-8x^2+3x^3$** en el intervalo [0, 2] y limitado con el eje de la abscisa primero debemos trazar nuestro eje de coordenadas, luego graficarás la función dándole valores a "x" para así obtener un valor de "y" obteniendo la siguiente figura.





Se subdivide en 10 rectángulos (todos de la misma base 0.2 unidades y alturas diferentes) el área bajo la curva, a continuación, calcularemos el área de cada rectángulo (enumerándolos como R1 al R10 de izquierda a derecha) multiplicando su base por la

R1 = 0.2 X 0.3 = **0.06 U^2**

R2 = 0.2 X 1 = **0.2 U^2**

R3 = 0.2 X 1.4 = **0.28 U^2**

R4 = 0.2 X 1.2 = **0.24 U^2**

R5 = 0.2 X 1 = **0.2 U^2**

R6 = 0.2 X 0.8 = **0.16 U^2**

R7 = 0.2 X 0.8 = **0.16 U^2**

R8 = 0.2 X 1 = **0.2 U^2**

R9 = 0.2 X 1.6 = **0.32 U^2**

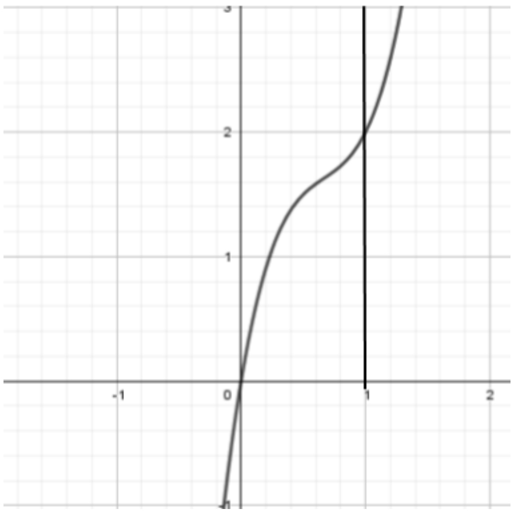
R10 = 0.2 X 2.6 = **0.52 U^2**

Área total = 0.06 + 0.2 + 0.28 + 0.24 + 0.2 + 0.16 + 0.16 + 0,2 + 0.32 + 0.52

Área total = 2.34 U^2

Practicando

Calcula el área bajo la curva de la siguiente función y = $6x - 8x^2 + 4x^3$ en el intervalo [0.1] y limitado por el eje "x", mediante el trazado de 5 rectángulos.



Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Entiendo y logro identificar que es área .		
Puedo reconocer a que figura pertenecen las fórmulas del área respectivamente.		
Puedo trazar rectángulos bajo una curva en una gráfica.		
Entiendo y logro calcular áreas de rectángulos bajo una curva.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Pinterest. Cuadro de fórmulas de área y perímetro. Disponible en: https://www.pinterest.com.mx/pin/580682945678106593/
- Aprende matemáticas. Área bajo una curva. Disponible en: https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/area-bajo-una-curva/

Lección 4. La Integral indefinida y definida

Explorando

Contesta las siguientes preguntas.

1. Define el concepto de derivada

2. ¿Cuál es la principal función de una derivada?

3. Define antiderivada

4. ¿Qué relación existe entre derivada y antiderivada?

5. ¿Qué pasa si derivas $f(x)=5x$ y luego calculas su antiderivada?

Comprendiendo

La Integral indefinida y definida

Cómo ya se ha visto en la lección anterior, donde se calcula el área bajo la curva o una función a partir de rectángulos o trapecios, es importante visualizar que esto se puede simplificar usando la antiderivada, en primera instancia de forma indefinida o primitiva y después limitarla en intervalos para calcular el área que se desee obtener, por ello definiremos de manera resumida ambos conceptos de antiderivada o integral.

Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: **el cálculo diferencial y el cálculo integral**. El Cálculo diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el Cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área.

El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que en realidad estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta de que la derivación y la integración son procesos inversos.

El **Teorema fundamental del cálculo** precisa la relación inversa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas.

Antiderivada Indefinida o primitiva

Podemos definir a la integral indefinida como la representante de toda la familia de funciones es decir una antiderivada para cada valor de la constante ***C***.

Es importante mencionar que una integral indefinida en términos generales es una función o familia de funciones.

Es decir, una antiderivada indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

Forma de una antiderivada indefinida: $\int f(x)dx$ y se lee como la antiderivada de la función de ***X***, diferencial de ***X***.

Ejemplo:

Para resolver aplicamos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Extraemos la constante de integración $3 \int x^1 dx$

Como ***n = 1***

Entonces como en la formula tenemos ***n+1*** queda ***1+1=2***

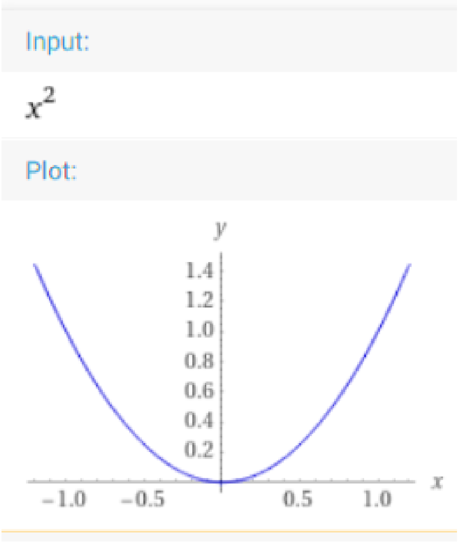
Aplicando queda: $\int 3xdx = \frac{3x^2}{2} + C$

Donde ***C*** es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real. (Solo se suma una constante en las antiderivadas indefinidas)

Ejemplo 2

Al calcular la integral indefinida de $f(x) = 4 - x^2$ tenemos:

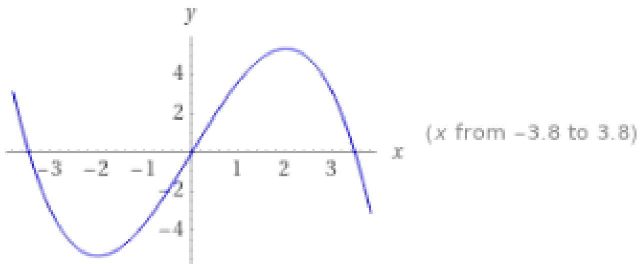
El grafico está dado por:



Y su integral:

$$\int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3} + \text{constant}$$

Plots of the integral:



Antiderivada definida

A diferencia de la antiderivada indefinida la antiderivada definida representa un valor numérico porque está delimitada en intervalos de integración (superior e inferior).

Ejemplo:

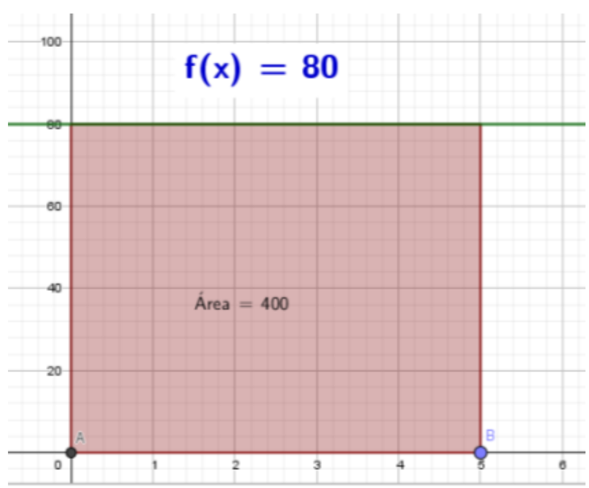
Sí un automóvil va a una velocidad constante de 80 km/h durante 5 horas. ¿Qué distancia recorrió?

Como puedes observar este es un ejercicio muy sencillo ya que no necesita una integral para resolverse, sin embargo, es una buena oportunidad para que compruebes la utilidad de la integral definida.

Como sabrás, la respuesta es clara usando fórmulas de física o simplemente multiplicando 80 (5) = 400 km pero grafiquemos el recorrido.

Como puedes observar, al resolver la integral de la velocidad desde el minuto 0 hasta el 5 encontramos el área, y esta representa la distancia recorrida por el móvil.

Pasos:



1. Se calcula la primitiva
2. Se evalúa límite superior menos límite inferior (Simplemente después de integrar sustituimos en las variables que quedaron primero el valor superior y después hacemos lo mismo con el valor inferior y finalmente restamos superior menos inferior) como se muestra a continuación.

3.

$$\int_0^5 \mathbf{80}dx = [\mathbf{80}x]_0^5 = \mathbf{80(5) - 80(0) = 400}$$

Este ejercicio es con la finalidad de que compruebes la utilidad de la antiderivada definida de una manera muy sencilla.

Existen fórmulas de integración esta es la base que te servirá para resolver antiderivadas complejas.

La integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas. Dado el intervalo **[a, b]** en el que, para cada uno de sus puntos ***X***, se define una función ***f (x)*** que es mayor o igual que **0** en **[a, b],** se llama integral definida de la función entre los puntos a y b al área de la porción del plano que está limitada por la función, el eje horizontal **0X** y las rectas verticales de ecuaciones **x = a y x = b.**

La integral definida de la función entre los extremos del intervalo **[a, b]** se denota como:

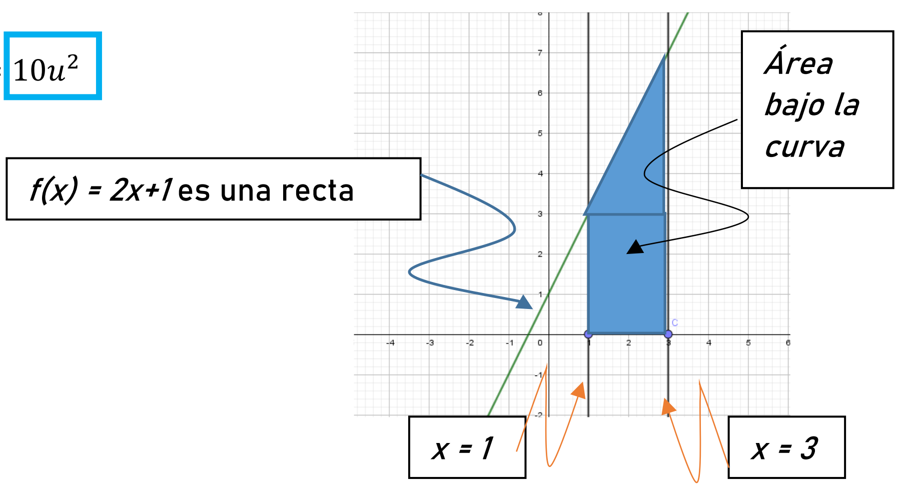
$$\int_a^b f(x)dx$$

Muy bien vamos a calcular el área bajo la curva ***y= 2x+1*** para el intervalo ***[1,3],*** calculando la integral y evaluándola primero con el valor de **b** y le restaremos evaluándola con el valor de **a**, observa:

$$\int_1^3 (2x+1)dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + x = \frac{2x^2}{2} + x = x^2 + x$$

$$A = [x^2 + x]\ _1^3 = [(3)^2 + 3] - [(1)^2 + 1] = [9+3] - [1+1]$$

$A = 12 - 2 = \boxed{10u^2}$



Practicando

Resuelve los siguientes ejercicios.

Calcula el área bajo la curva de la función **y= x³** para el intervalo de **[1,4]** arriba del eje de las "*X*", hazlo por medio de la integral definida.

$$\int \frac{2x}{4} dx$$

$$\int 5x^2 dx$$

$$\int_1^7 2x^2 dx$$

$$\int_3^5 x^2 dx$$

$$\int_2^{10} x^3 dx$$

Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de operar las fórmulas de integración base		
Soy capaz de identificar las constantes a extraer de una integral		
Comprendí el cálculo del área bajo la curva utilizando la integral definida		
Entiendo el Teorema fundamental del cálculo		
Soy capaz de calcular el área bajo una función.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Ronny Online, (2020). La conexión entre la derivada y la integral. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=oJfipj5Oky4&ab_channel=RonnyOnline
- julioprofe, (2012). Teorema Fundamental del Cálculo - Definición y ejemplos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=SCKpUCax5ss&ab_channel=julioprofe
- LosApuntes, (2019). Integral indefinida vs Integral definida. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=634DF0tN4tc&ab_channel=LosApuntes
- Hiru.eus, (2020). La integral definida. Disponible en: https://www.hiru.eus/es/matematicas/la-integral-definida

Lección 5. Integrales indefinidas: Algebraicas (Parte I)

Explorando

Identificando funciones algebraicas

Con base en tu experiencia trabajando con funciones, principalmente en el curso de Cálculo Diferencial, identifica y encierra en un círculo todas aquellas funciones que, por sus características, son clasificadas como Algebraicas:

$f(x) = 5\tan x^2$

$j(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9$

$m(x) = 1 - \sqrt{x}$

$i(x) = 7\log_3 5x$

$y = -\csc\frac{2}{x^4}$

$k(x) = \frac{x+3}{5x-2}$

$h(x) = \frac{x^8}{5}$

$y = 6^{9x-1}$

$n(x) = \sqrt[3]{6-7x}$

$k(x) = -\frac{12}{x^3}$

$p(x) = 2e^{x^2}$

$g(x) = \frac{3}{2}sen\,4x$

Operaciones con fracciones

Al determinar la integral indefinida de funciones algebraicas, será necesario realizar operaciones con fracciones; pensando en esa situación, resulta conveniente practicar efectuando las siguientes operaciones:

- $-\frac{3}{4} + \frac{9}{6} =$
- $\frac{14}{8} + \frac{5}{10} =$
- $-\frac{4}{8} + 1 =$
- $-3 - \frac{7}{2} =$
- $\left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) =$
- $\left(\frac{5}{3}\right)(-4) =$
- $\left(-\frac{4}{10}\right)\left(\frac{9}{2}\right) =$
- $(15)\left(\frac{7}{6}\right) =$
- $-\frac{3}{8} \div \frac{11}{2} =$
- $6 \div \frac{1}{4} =$
- $-\frac{9}{5} \div -12 =$
- $\frac{1}{10} \div -\frac{5}{12} =$

Comprendiendo

Aprendiendo a integrar mediante fórmulas directas

Como recordarás, una de las formas más prácticas e inmediatas para obtener la derivada de una función, es por medio del uso de fórmulas directas y que seguramente lo retomaste en la **Lección 1**, pues para integrar no será la excepción.

Para ello, comenzaremos con la revisión de algunas propiedades, las cuales ya emplean la simbología pertinente que se te presentó con anterioridad.

Propiedades de las integrales indefinidas

Propiedad 1: $\int \boldsymbol{k \cdot f(x)\, dx} = k \int f(x)\, dx$, donde $\boldsymbol{k}$ es una constante y $\boldsymbol{f(x)}$ una función.

Esta propiedad nos muestra que si tenemos una constante que multiplica a una función, entonces la constante la podemos escribir antes del símbolo de integración. Tal y como se muestra enseguida en los tres ejemplos ilustrativos:

$$* \int \boldsymbol{-4x\, dx} = \boldsymbol{-4} \int x\, dx$$

$$* \int \boldsymbol{\frac{3}{4}x^2\, dx} = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \int x^2\, dx$$

$$* \int \boldsymbol{7x^{3/5}\, dx} = \boldsymbol{7} \int x^{3/5}\, dx$$

Puedes practicar un poco con los siguientes casos:

a) $\int \boldsymbol{2x^3\, dx} =$

b) $\int -\boldsymbol{\frac{2}{5}x\, dx} =$

c) $\int \boldsymbol{6\, dx} =$

d) $\int \boldsymbol{4.2x^2\, dx} =$

Es importante mencionar que, al momento de utilizar las fórmulas de integración directa, dicha constante pasará directamente a multiplicar el resultado.

Propiedad 2: $\int[\boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{g(x)}]\,\boldsymbol{dx} = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, donde $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$ son funciones.

Esta propiedad nos indica que, si tenemos una suma de funciones en el integrando principal, entonces podemos reescribir el ejercicio como una suma de integrales; como se ejemplifica a continuación:

$$* \int (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3)\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{x}\,dx - \int \boldsymbol{x}^2\,dx + \int \boldsymbol{x}^3\,dx$$

$$* \int (\boldsymbol{9x}^2 + \boldsymbol{4x} - \boldsymbol{7})\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{9x}^2\,dx + \int \boldsymbol{4x}\,dx - \int \boldsymbol{7}\,dx$$

Observa que, en este último ejemplo, puedes utilizar todavía la **Propiedad 1** y es completamente válido, para si en algunos casos así sucede, no te sorprenda:

$$* \int (\boldsymbol{9x}^2 + \boldsymbol{4x} - \boldsymbol{7})\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{9x}^2\,dx + \int \boldsymbol{4x}\,dx - \int \boldsymbol{7}\,dx$$

$$= \boldsymbol{9}\int x^2\,dx + \boldsymbol{4}\int x\,dx - \boldsymbol{7}\int dx$$

Ahora ponlo en práctica en los siguientes ejercicios:

$$\textbf{a)} \int \left(-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{7}}\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{2}\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$\textbf{b)} \int \left(-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{7}}\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{2}\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$\textbf{c)} \int \left(-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{7}}\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{2}\right)\boldsymbol{dx} =$$

La constante de integración “c”.

Cuando calculamos la Integral Indefinida de una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, al resultado se le conoce como **Función Primitiva**; la cual se expresa como $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, y siempre deberá ir acompañada de un valor agregado conocido como *constante de integración* y que es denotada por $\boldsymbol{c}$.

De hecho, la podremos apreciar con frecuencia una vez que entremos en la revisión de las fórmulas de integración directa, ya que todos los resultados deben incluirla sin excepción y no debemos olvidar escribirla.

Pero, ¿a qué se refiere dicha constante de integración? Esto tiene que ver con el hecho de que la derivada y la integral son operaciones inversas, y que incluso, para verificar si el resultado de nuestra integral indefinida es correcto, lo que podemos hacer es derivar la función primitiva resultante, y obtener como resultado el integrando de la integral.

Esto quiere decir que si nuestra función primitiva es $F(x) = 4x^3 - 5x$ (observa que no se está agregando la constante de integración c), entonces si la derivamos, lo que vamos a obtener es la función que compone al integrando de la integral, es decir, $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = 12x^2 - 5$$

Y entonces, al encontrar la función $f(x)$ que tendríamos en el integrando, la integral indefinida queda estructurada como:

$$\int (12x^2 - 5)\, dx$$

Siendo aquí donde surge el meollo del asunto, ya que $F(x) = 4x^3 - 5x$ no es la única función cuya derivada corresponde a $12x^2 - 5$; incluso, existe una cantidad infinita de funciones cuya derivada corresponde a dicha expresión, por ejemplo:

- $F(x) = 4x^3 - 5x + 3.1$
- $F(x) = 4x^3 - 5x - \frac{3}{4}$
- $F(x) = 4x^3 - 5x - 6$

Calculando la derivada para cada una de ellas, la respuesta siempre es $F'(x) = 12x^2 - 5$.

Y si se observa con detenimiento, lo que las hace diferentes, es que al final tienen una constante arbitraria distinta. Entonces, como todas esas funciones primitivas (y más que pudieran existir) nos llevan a la misma función $f(x)$ que conforma al integrando de la integral, es que resulta necesario que a toda **Función Primitiva** que se obtenga de una integral indefinida, se le deba agregar la constante de integración c, la cual representa de manera general, las diferentes funciones a las que puede hacer alusión el resultado de la integración.

De este modo, podemos deducir entonces que la forma correcta para escribir la función primitiva $F(x) = 4x^3 - 5x$, debe ser como $F(x) = 4x^3 - 5x + c$, para de esta manera considerar a toda esa *familia de funciones* a la que hace referencia el resultado, y donde c hace referencia a un valor constante arbitrario que ya en problemas de aplicación, seguramente se podrá conocer con precisión.

Abordemos ahora sí, cómo obtener las integrales indefinidas mediante fórmulas directas:

Fórmulas de integración directa para funciones algebraicas

$$1.\quad \int dx = x + c$$

La **Fórmula 1** es muy sencilla para utilizar, y nos sirve para los casos en que el integrando corresponde a la constante 1 (aunque no se aprecie puesto que no es necesario escribirlo), o bien, cuando solamente aparece el diferencial dx.

Por otra parte, antes de comenzar a ver algunos ejemplos ilustrativos sobre cómo se emplea esta fórmula, no está de más mencionar, que siempre en un proceso de integración, es necesario tener presentes *las propiedades de las integrales indefinidas* que se revisaron previamente, y no olvidar escribir la constante de integración c para todos los resultados. Veamos:

$\int 8dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int 8dx = 8\int dx$	Aplicamos la **Propiedad 1**, y observa que el integrando ya corresponde a la estructura indicada por la **Fórmula 1**.
$8\int dx = 8 \cdot x + c$	Aplicamos la **Fórmula 1** de integración directa, y nota que la constante **8**, pasa directamente al resultado, a multiplicar.
$\therefore \int 8dx = 8x + c$	Resultado.

Observa que el proceso es muy sencillo, pero para reforzar, veamos otro ejemplo:

$\int -\frac{4}{3}dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int -\frac{4}{3}dx = -\frac{4}{3}\int dx$	Aplicamos la **Propiedad 1**, y observa que el integrando ya corresponde a la estructura indicada por la **Fórmula 1**.
$-\frac{4}{3}\int dx = -\frac{4}{3} \cdot x + c$	Aplicamos la **Fórmula 1** de integración, y observa que la constante $-\frac{4}{3}$, pasa directamente al resultado, a multiplicar, tal y como sucedió en el caso anterior.
$\therefore \int -\frac{4}{3}dx = -\frac{4}{3}x + c$	Resultado.

Nota que esta fórmula se utiliza para cuando en el integrando tenemos una **constante**, y que, básicamente al integrar, a dicha constante se le hace acompañar de la variable x.

$$\textcolor{red}{\mathbf{2.}}\quad \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad para\; n \neq -1$$

La **Fórmula 2**, vamos a utilizarla para cuando tenemos en el integrando la presencia de una variable elevada a una potencia $\boldsymbol{n}$, pero cuyo valor sea diferente de $-\mathbf{1}$; ya sea $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x^2}$, $\boldsymbol{x^{2/3}}$, $\boldsymbol{x^{-5}}$, etcétera.

Si se observa, básicamente lo que tenemos que hacer al utilizar esta fórmula, es sumar 1 al exponente y dividir la variable entre la misma suma del exponente y 1. Veamos algunos ejemplos y recuerda contemplar el uso de *las propiedades de las integrales indefinidas* cuando sea necesario, y que en el apartado de **Justificación** se te hará notar:

$\int x^4 dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c$	Aplicamos directamente lo indicado por la **Fórmula 2**.
$\therefore \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$	Reducimos operaciones para simplificar el resultado, las cuales consisten en efectuar las sumas indicadas, y de este modo finalizar. En este caso, también es correcto si se escribe el resultado como: $\boxed{\frac{1}{5}x^5 + c}$

$\int -5x^{-8} dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int -5x^{-8} dx = \textcolor{red}{-5} \int x^{-8} dx$	Aplicamos la **Propiedad 1**.
$\textcolor{red}{-5} \int x^{-8} dx = \textcolor{red}{-5} \cdot \frac{x^{-8+1}}{-8+1} + c$	Aplicamos directamente lo indicado por la **Fórmula 2**, pasando la constante -5 a multiplicar el resultado.
$-5 \int x^{-8} dx = \textcolor{red}{-5} \cdot \frac{x^{-7}}{-7} + c$	Simplificar exponente y denominador; y procedemos a multiplicar por **-5**.
$\int -5x^{-8} dx = \frac{-5}{-7} x^{-7} + c$	Dividimos signos y “enviamos” a la variable al denominador para que su exponente sea positivo; ya que debemos procurar que nuestros resultados tengan exponentes positivos.
$\therefore \int -5x^{-8} dx = \frac{5}{7x^7} + c$	Resultado.

$\int \frac{10}{x^7} dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int \frac{10}{x^7} dx = \int 10x^{-7}\, dx$	Cuidando que el ejercicio cumpla con la estructura indicada por la **Fórmula 2**: $\int x^n\, dx$, notemos que la variable no puede estar en el denominador, pero si "la subimos" para apegarnos a la forma de la fórmula, entonces debemos cambiar el signo de su exponente.
$\int 10x^{-7}\, dx = 10 \int x^{-7}\, dx$	Aplicamos la **Propiedad 1** por la constante 10.
$10 \int x^{-7}\, dx = 10 \cdot \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c$	Aplicamos directamente la **Fórmula 2**, pasando la constante 10 a multiplicar.
$10 \int x^{-7} dx = 10 \cdot \frac{x^{-6}}{-6} + c$	Reducimos operaciones en exponente y denominador y multiplicamos por el 10.
$10 \int x^{-7}\, dx = -\frac{10}{6} x^{-6} + c$	Simplificamos la fracción $-\frac{10}{6}$ y "bajamos" la variable para hacer su exponente positivo.
$\therefore \int \frac{10}{x^7}\, dx = -\frac{5}{3x^6} + c$	Resultado.

$\int \frac{3}{4} x^{1/2} dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int \frac{3}{4} x^{1/2}\, dx = \frac{3}{4} \int x^{1/2} dx$	Aplicamos la **Propiedad 1**.
$\frac{3}{4} \int x^{1/2}\, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c$	Aplicamos directamente lo indicado por la **Fórmula 2**, pasando la constante $\frac{3}{4}$ a multiplicar el resultado.
$\frac{3}{4} \int x^{1/2}\, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$	Reducimos operaciones para simplificar y procedemos a multiplicar.
$\frac{3}{4} \int x^{1/2}\, dx = \frac{\frac{3}{4} x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$	Observa que, por conveniencia, la fracción $3/4$ pasó a multiplicar al numerador $x^{3/2}$ y enseguida podemos simplificar $3/4$ y $3/2$ mediante la división de fracciones.
$\frac{3}{4} \int x^{1/2}\, dx = \frac{6}{12} x^{3/2} + c$	Y reducimos la fracción $\frac{6}{12}$ para finalizar.
$\therefore \int \frac{3}{4} x^{1/2}\, dx = \frac{1}{2} x^{3/2} + c$	Resultado.

Habiendo revisado ya hasta este momento las primeras 2 fórmulas de integración directa para funciones algebraicas, es necesario abordar algunas situaciones en las que tenemos que utilizar la **Propiedad 2** para integrales indefinidas. Veamos:

$\int (x^3 + x^2 - x)dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int (x^3 + x^2 - x)dx =$ $\int x^3 dx + \int x^2\, dx - \int x\, dx$	Aplicamos la **Propiedad 2**, dándonos origen a 3 nuevas integrales; y eso nos permitirá integrar cada una por separado.
$\int x^3 dx + \int x^2\, dx - \int x\, dx =$ $\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + c$	Aplicamos directamente lo indicado por la **Fórmula 2**, para cada una de las integrales. Y observa que solo es necesario agregar una sola constante de integración $+c$.
$\int x^3 dx + \int x^2\, dx - \int x\, dx =$ $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$	Reducimos operaciones para simplificar el resultado y finalizar.
$\therefore \int (x^3 + x^2 - x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$	Resultado.

$\int (6x^2 + 2x - 7)dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int (6x^2 + 2x - 7)dx =$ $\int 6x^2 dx + \int 2x\, dx - \int 7\, dx$	Aplicamos la **Propiedad 2**, dándonos origen a 3 nuevas integrales; y eso nos permitirá integrar cada una por separado.
$\int 6x^2 dx + \int 2x\, dx - \int 7\, dx =$ $6\int x^2 dx + 2\int x\, dx - 7\int dx$	Observa cómo en este caso es posible utilizar la **Propiedad 1** para continuar con el proceso de integración; aunque es posible omitir este paso, siempre y cuando las constantes **6**, **2** y **7** las lleves al resultado a multiplicar.
$6\int x^2 dx + 2\int x\, dx - 7\int dx =$ $6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - 7 \cdot x + c$	Aplicamos directamente lo indicado por la **Fórmula 2**, para las primeras 2 integrales, y la **Fórmula 1** para integrar la tercera.
$6\int x^2 dx + 2\int x\, dx - 7\int dx =$	Reducimos operaciones para simplificar y proceder a multiplicar.

$\color{red}{6}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \color{red}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2} - 7x + c$	
$6\int x^2dx + 2\int x\,dx - 7\int dx =$ $\dfrac{\color{red}{6}}{\color{red}{1}}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{\color{red}{2}}{\color{red}{1}}\cdot\dfrac{x^2}{2} - 7x + c =$ $\dfrac{6}{3}x^3 + \dfrac{2}{2}x^2 - 7x + c =$	Efectuamos los productos para los primeros 2 términos y procedemos a reducir las fracciones $\frac{6}{3}$ y $\frac{2}{2}$ para finalizar.
$\therefore \int(6x^2 + 2x - 7)dx = 2x^3 + x^2 - 7x + c$	Resultado.

Conforme vayas adquiriendo experiencia, notarás como cada vez será más sencillo determinar la integral indefinida por medio de fórmulas directas.

¿Cómo comprobar que nuestros resultados son correctos?

Seguro recordarás que en esta lección mencionamos que a la integral también se le conoce como *antiderivada*, debido a que la integración y la diferenciación son operaciones inversas; y que una manera de comprobar si nuestro resultado es correcto, es derivando la Función Primitiva, y la respuesta debe ser igual al integrando, ¿lo probamos?

Consideremos el último ejemplo revisado, donde tuvimos que:

$$\int(6x^2 + 2x - 7)dx = 2x^3 + x^2 - 7x + c$$

Donde la función primitiva (el resultado de la integral), corresponde a: $F(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + c$, y si calculamos su derivada tenemos entonces $F'(x) = 6x^2 + 2x - 7$, la cual es igual al Integrando y, por tanto, nuestro resultado ha sido comprobado y es correcto.

Recuerda que la constante de integración c, es precisamente un valor constante cualquiera, y la derivada de una constante es igual a cero, por ese motivo ya no aparece en $F'(x)$, pero que es muy importante incluirla en tus resultados, para que no olvides escribirla.

Si gustas comprobar los resultados de los otros ejemplos, sería magnífico.

Practicando

Resuelve las siguientes integrales por medio de las fórmulas directas revisadas y utilizando adecuadamente las propiedades vistas:

1. $\int -6x^9\,dx =$

2. $\int \frac{7}{3}x^{-4}\,dx =$

3. $\int -\frac{12}{x^3}\,dx =$

4. $\int (5x^5 - 3x^3 - x)\,dx =$

5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)dx =$

Observa cuidadosamente el desarrollo para la siguiente integral y responde correctamente lo que se te solicita:

$$\begin{aligned}
\int \left(\boldsymbol{8x^{7/5} + \frac{3}{2}x - 1}\right)\boldsymbol{dx} &= \int 8x^{7/5}\,dx + \int \frac{3}{2}x\,dx - \int 1\,dx \\
&= 8\int x^{7/5}\,dx + \frac{3}{2}\int x\,dx - \int dx \\
&= 8 \cdot \frac{x^{7/5+1}}{7/5+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - x + c \\
&= \frac{8x^{12/5}}{12/5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - x + c \\
&= \frac{40\,x^{12/5}}{12} + \frac{1}{3}x^2 - x + c \\
&= \boxed{\frac{10}{3}x^{12/5} + \frac{1}{3}x^2 - x + c} \Leftarrow \boldsymbol{F(x)}
\end{aligned}$$

- ¿Ya notaste que la derivada de la función primitiva $F(x)$ no corresponde al integrando? Si no es así, compruébalo en el siguiente espacio:

- Revisa nuevamente el desarrollo del ejercicio. Identifica el error y enciérralo, para que enseguida escribas el desarrollo adecuado que nos lleve a la respuesta correcta:

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico correctamente una función algebraica.		
Reconozco con facilidad cuándo puedo utilizar las propiedades de las integrales indefinidas para integrar.		
Puedo integrar funciones algebraicas utilizando las fórmulas 1 y 2.		
Comprendo el concepto de función primitiva y puedo identificarla en un ejercicio de integración.		
Soy capaz de comprobar si el resultado de una integral es correcto.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy, Encontrar antiderivadas e integrales indefinidas: reglas básicas y notación. Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-integration-new/bc-6-8a/v/indefinite-integrals-of-x-raised-to-a-power
- Math2me, Integral con exponente positivo. Disponible en: https://youtu.be/rIZyhvNRlu0

Lección 6. Integrales indefinidas: Algebraicas (Parte 2)

Explorando

Realiza los siguientes ejercicios de despejes.

Algo que será muy importante en esta lección, es recordar cómo despejar adecuadamente. Por ello, te invitamos a practicar, realizando los despejes solicitados para las fórmulas dadas a continuación:

Velocidad Media	Despejes solicitados
$V_m = \frac{d}{t}$	$d =$
	$t =$

Movimiento rectilíneo uniforme	Despejes solicitados
$S = S_0 + v \cdot t$	$v =$
	$S_0 =$
	$t =$

Densidad	Despejes solicitados
$\rho = \frac{m}{V}$	$V =$
	$m =$

Determina las siguientes derivadas utilizando la notación $\frac{dy}{dx}$:

1. $\boldsymbol{g(x)} = 8x^2 + 5x + 6$

   $\boldsymbol{\frac{dg}{dx}} =$

2. $\boldsymbol{y} = -\frac{1}{9}x^3 - 7x - 11$

   $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} =$

3. $\boldsymbol{h(x)} = 4 - \frac{2}{x}$

   $\boldsymbol{\frac{dh}{dx}} =$

4. $\boldsymbol{f(x)} = (x - 3x^3)^5$

   $\boldsymbol{\frac{df}{dx}} =$

Comprendiendo

Integrando mediante fórmulas directas

Retomando lo revisado en la lección previa, sobre el uso de fórmulas para obtener la integral indefinida de una función, en esta ocasión continuaremos con la misma labor, solo que utilizando funciones más elaboradas y que implicarán algunos detalles adicionales a considerar.

Entre algunas de las novedades a revisar, comenzaremos a implementar el Método de sustitución o cambio de variable para determinar la integral indefinida de una función, el cual se trabaja conjuntamente con las fórmulas de integración directa, pero que resulta sumamente práctico ya que nos permitirá simplificar los procedimientos.

Método de sustitución o cambio de variable.

Este método, como ya se mencionó anteriormente, busca simplificar el proceso de integración, ya que nos permite reconstruir nuestras integrales de modo que se obtenga una integral visualmente más sencilla, y que con mayor facilidad podamos hacer uso de las fórmulas de integración directa que estaremos revisando de aquí en adelante.

De manera general, la variable a utilizar o con la cual se realiza el cambio, la vamos a denotar como $\boldsymbol{u}$, y dicha variable hará referencia a diferentes expresiones según sea el caso y la necesidad:

- En funciones **Algebraicas**, hará referencia a expresiones algebraicas de varios términos, y que se encuentran afectadas por una potencia diferente de 1; por ejemplo:
  Si tenemos la expresión $(9x^2 - 5x + 1)^3$, vamos a considerar entonces que $u = 9x^2 - 5x + 1$, y entonces la expresión inicial la podemos denotar como u^3.

- En funciones **Exponenciales**, hará alusión al exponente de las bases:
  Si se tiene la expresión 7^{x^3-4}, consideraremos que $u = x^3 - 4$, y entonces al hacer el cambio o la sustitución, la expresión exponencial se denotará como 7^u.

- En funciones **Trigonométricas**, se empleará para sustituir el argumento de las funciones trigonométricas que se estén abordando:
  Si por ejemplo se nos presenta $\csc(4 - 3x^2)$, entonces $u = 4 - 3x^2$, y entonces la expresión la denotamos como $\csc u$.

Al hacer estos cambios o sustituciones en las funciones, será únicamente momentáneo, mientras se desarrolla el proceso para obtener la integral indefinida, pero al final, ya que tenemos el resultado, entonces volveremos a reemplazar la variable u por la expresión *"original"* que se tenía en el inicio.

Veamos en seguida las nuevas fórmulas de integración directa a revisar, con las cuales ya se hará uso de este método de sustitución o cambio de variable, y que son continuación de las revisadas en la lección anterior.

Fórmulas de integración directa para funciones algebraicas

$$\textcolor{red}{\mathbf{3.}}\quad \int \boldsymbol{u^n}\, \boldsymbol{du} = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad para\, n \neq -1$$

Como puedes observar, en esta **Fórmula 3** ya se aprecia el uso de la variable $\boldsymbol{u}$, lo que nos indica que entonces será momento de implementar el *método de sustitución o cambio de variable*.

En este caso, la fórmula hace alusión para cuando tengamos que integrar expresiones algebraicas de varios términos, pero que se encuentran afectadas por una potencia $\boldsymbol{n}$ diferente de 1, ya que cuando la potencia es 1, recuerda que se integra término a término, como se revisó en la lección previa, y haciendo uso de las **Propiedades 1** y **2** para las integrales indefinidas, que también se estudiaron en esa misma lección y que seguirán siendo necesarias en estos casos.

Por otra parte, también es importante mencionar que, a partir de este momento, en que hacemos esa *sustitución* o *cambio de variable* por $\boldsymbol{u}$, vamos a tener que determinar la derivada de $\boldsymbol{u}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, que no es otra cosa que $\boldsymbol{\frac{du}{dx}}$, ya que como puedes apreciar en la estructura general de la **Fórmula 3** (y en las sucesivas), el diferencial está denotado como $\boldsymbol{du}$ y no como $\boldsymbol{dx}$.

Entonces si tenemos por ejemplo la integral $\int \boldsymbol{(4x+1)^2 dx}$, apreciamos que en este caso particular $\boldsymbol{u = 4x + 1}$, y por tanto podemos reescribir nuestra integral como $\int \boldsymbol{u^2\, dx}$. Observa aquí que el diferencial sigue siendo $\boldsymbol{dx}$, pero en los ejemplos ilustrativos que vienen en seguida, te mostraremos cómo es que se llega al diferencial $\boldsymbol{du}$.

Nota que $\int \boldsymbol{(4x+1)^2 dx}$ no puede reescribirse como la suma de dos integrales, debido a que la expresión $\boldsymbol{4x+1}$ se encuentra afectada por un exponente $\boldsymbol{n}$ diferente de 1, y eso es lo que nos da la pauta para utilizar la **Fórmula 3**.

Veamos algunos ejemplos sobre cómo integrar utilizando esta nueva fórmula:

$\int (7x-2)^3 dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$u = 7x - 2$	Debido a que la expresión $7x - 2$ se encuentra afectada por la potencia **3**, es un indicador para utilizar la **Fórmula 3** e identificar u conforme a la estructura general de dicha fórmula.
$\frac{du}{dx} = 7$ $\frac{du}{7} = dx$	Siempre que se realice la identificación de u, será necesario calcular la derivada de u con respecto a x, y despejar dx.
$\int (7x-2)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{7}$	Sustituimos $7x - 2$ y dx respectivamente. Y nota cómo la forma de nuestra integral es más reducida. Con eso se simplificará el procedimiento y ya aparece el diferencial du.
$\int u^3 \cdot \frac{du}{7} = \frac{1}{7} \int u^3 du$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la constante $1/7$ que se encontraba junto al diferencial.
$\frac{1}{7} \int u^3 du = \frac{1}{7} \cdot \frac{u^{3+1}}{3+1} + c$	Aplicamos la **Fórmula 3** de manera directa.
$\frac{1}{7} \int u^3 du = \frac{1}{7} \cdot \frac{u^4}{4} + c$ $= \frac{1}{28} u^4 + c$	Simplificamos operaciones.
$\therefore \int (7x-2)^3 dx = \frac{1}{28} (7x-2)^4 + c$	Sustituimos u para finalizar.

$\int \frac{2x\,dx}{(11-5x^2)^4} =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int \frac{2x\,dx}{(11-5x^2)^4} = \int (11-5x^2)^{-4}\,2xdx$	Por practicidad, conviene hacer un ajuste a la estructura de nuestro ejercicio, pasando $(11-5x^2)^4$ al numerador, aplicando la propiedad de los exponentes correspondiente; para que adquiera la forma requerida por la fórmula 3: $\int u^n\,du$.
$u = 11-5x^2$	Observando la estructura de nuestro ejercicio, asignamos como u a la expresión afectada por una potencia n.
$\frac{du}{dx} = -10x$ $\frac{du}{-10x} = dx$	Se calcula la derivada de u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int (11-5x^2)^{-4} 2xdx = \int u^{-4} \cdot \frac{2xdu}{-10x}$	Sustituimos $11-5x^2$ y dx respectivamente. Observa que $2x$ se conserva, pero habrá de reducirse con $-10x$.
$\int (11-5x^2)^{-4} 2xdx = \int u^{-4} \cdot -\frac{1}{5}du$	Reducimos $\frac{2x}{-10x}$.
$\int u^{-4} \cdot -\frac{1}{5}du = -\frac{1}{5}\int u^{-4}du$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la constante $-{}^{1}/_{5}$.
$-\frac{1}{5}\int u^{-4}du = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-4+1}}{-4+1} + c$	Aplicamos la **Fórmula 3** de manera directa.
$-\frac{1}{5}\int u^{-4}du = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} + c$ $= \frac{1}{15}u^{-3} + c$ $= \frac{1}{15u^3} + c$	Simplificamos operaciones y escribimos la variable u en el denominador, para asegurar que nuestro resultado tenga exponentes positivos.
$\therefore \int \frac{2x\,dx}{(11-5x^2)^4} = \frac{1}{15(11-5x^2)^3} + c$	Sustituimos u para finalizar.

$\int \sqrt[3]{12x+7}\ 8dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int \sqrt[3]{12x+7}\ 8dx = \int (12x+7)^{1/3}\ 8dx$	Conviene hacer un ajuste a la estructura de nuestro ejercicio, convirtiendo $\sqrt[3]{12x+7}$ a $(12x+7)^{1/3}$, aplicando la propiedad de los exponentes y radicales correspondientes; para que adquiera la forma requerida por la fórmula: $\int u^n\, du$.
$u = 12x+7$	Observando la estructura de nuestro ejercicio, asignamos como u a la expresión afectada por una potencia n.
$\frac{du}{dx} = 12$ $\frac{du}{12} = dx$	Se calcula la derivada de u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int (12x+7)^{1/3}\ 8dx = \int u^{1/3} \cdot \frac{8du}{12}$	Sustituimos $12x+7$ y dx respectivamente. Observa que 8 se conserva, pero habrá que reducirse con 12.
$\int (12x+7)^{1/3}\ 8dx = \int u^{1/3} \cdot \frac{2}{3} du$	Reducimos $\frac{8}{12}$.
$\int u^{1/3} \cdot \frac{2}{3} du = \frac{2}{3} \int u^{1/3}\, du$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la constante $2/3$.
$\frac{2}{3} \int u^{1/3}\, du = \frac{2}{3} \cdot \frac{u^{1/3+1}}{1/3+1} + c$	Aplicamos la **Fórmula 3** de manera directa.
$\frac{2}{3} \int u^{1/3}\, du = \frac{2}{3} \cdot \frac{u^{4/3}}{4/3} + c = \frac{\frac{2}{3} u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c$ $= \frac{6}{12} u^{4/3} + c = \frac{1}{2} u^{4/3} + c$ $= \frac{1}{2} \sqrt[3]{u^4} + c$	Efectuamos operaciones, simplificamos la fracción $\frac{6}{12}$ y regresamos a raíz.
$\therefore \int \sqrt[3]{12x+7}\ 8dx = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(12x+7)^4} + c$	Sustituimos u para finalizar.

Hasta este punto, ¿te has preguntado por qué la **Fórmula 3** debe utilizarse para cuando la potencia n es diferente de -1?

He aquí la razón:

Tomemos como ejemplo la integral $\int(5x+3)^{-1}\,dx$, la cual por su estructura da la impresión de que puede resolverse empleando la **Fórmula 3:** $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$; sin embargo, al momento de utilizarla esto es lo que sucede:

$\int (5x+3)^{-1} dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$u = 5x + 3$	Se identifica u conforme a la estructura general de la **Fórmula 3**, como se ha venido trabajando en la lección.
$\frac{du}{dx} = 5$ $\frac{du}{5} = dx$	Calculamos la derivada de u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int (5x+3)^{-1} dx = \int u^{-1} \cdot \frac{du}{5}$	Sustituimos $5x+3$ y dx respectivamente.
$\int u^{-1} \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int u^{-1} du$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la constante $1/5$ que se encontraba junto al diferencial.
$\frac{1}{5} \int u^{-1} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-1+1}}{-1+1} + c$	Aplicamos la **Fórmula 3** de manera directa.
$\frac{1}{5} \int u^{-1} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^0}{0} + c$ $= \frac{u^0}{0} + c$	Simplificamos operaciones, pero tenemos una división por **cero**, las cuales **no están definidas**.

En este caso la potencia cero de la variable no es el problema, pues consideremos que $a^0 = 1$; pero el problema radica en que las divisiones por cero **NO** están definidas y, por lo tanto, esa es la razón por la cual no podemos aceptar ese resultado y la **Fórmula 3** no es útil para atender estos casos, incluso tampoco la **Fórmula 2** si se presentara un ejercicio como $\int x^{-1}\,dx$, ya que la situación del exponente -1, provoca el mismo problema.

Para esas situaciones es que contamos con la **Fórmula 4**, la cual detallaremos a continuación:

$$4.\ \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Al igual que en la **Fórmula 3**, en esta fórmula vamos a aplicar el método de *sustitución o cambio de variable*, y la variable $\boldsymbol{u}$ sigue haciendo alusión a expresiones algebraicas de varios términos, pero que ahora se encuentran afectadas por una potencia **-1**; de hecho, esta **Fórmula 4** debe utilizarse para cuando tengamos expresiones afectadas por una potencia **-1** como $(2x-3)^{-1}$, o que figuren en su forma racional como $\frac{1}{2x-3}$ aplicando la propiedad de los exponentes correspondiente.

Incluso, la estructura que muestra la **Fórmula 4**, es considerando la forma racional, por lo que una forma equivalente de la misma es: $\int u^{-1}\, du = \ln|u| + c$.

Para revisar cómo hacer un uso adecuado de la fórmula, veamos los siguientes casos, los cuales muestran con claridad la potencia **-1** o la forma racional de las expresiones:

$\int (-x-9)^{-1} dx =$	
Desarrollo	**Justificación**
$u = -x - 9$	Identificamos u conforme a la estructura general de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = -1$ $\frac{du}{-1} = dx$ o simplemente $-du = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int (-x-9)^{-1} dx = \int u^{-1} \cdot -du$	Sustituimos $-x-9$ y dx respectivamente.
$\int u^{-1} \cdot -du = -\int u^{-1}\, du$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la colocar el signo negativo antes del símbolo de integración. Recuerda que el uso de las propiedades de las integrales indefinidas (**1** y **2**) se revisó en la **Lección 5**, y su uso es continuo según la necesidad.
$-\int u^{-1}\, du = -\ln|u| + c$	Aplicamos la **Fórmula 4** de manera directa.
$\therefore \int (-x-9)^{-1} dx = -\ln|-x-9| + c$	Sustituimos u para finalizar.

$\int \frac{-3x\,dx}{4x^2+7} =$	
Desarrollo	**Justificación**
$\int \frac{-3x\,dx}{4x^2+7} = \int (4x^2+7)^{-1} \cdot -3x\,dx$	Puedes usar cualquiera de las dos formas, según te parezca más cómodo y sencillo, pero lo importante es que reconozcas que la **Fórmula 4** es la que debe utilizarse.
$u = 4x^2 + 7$	Identificamos u conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = 8x$ $\frac{du}{8x} = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int \frac{-3x\,dx}{4x^2+7} = \int \frac{-3x}{u} \cdot \frac{du}{8x}$	Sustituimos $4x^2+7$ y dx respectivamente. Observa que $-3x$ se conserva, pero habrá que reducirse con $8x$.
$\int \frac{-3x\,dx}{4x^2+7} = \int -\frac{3}{8} \cdot \frac{du}{u}$	Reducimos $\frac{-3x}{8x}$.
$\int -\frac{3}{8} \cdot \frac{du}{u} = -\frac{3}{8} \int \frac{du}{u}$	Implementamos la **Propiedad 1** de las integrales indefinidas para la constante $-{}^{3}/_{8}$.
$-\frac{3}{8} \int \frac{du}{u} = -\frac{3}{8} \ln\lvert u\rvert + c$	Aplicamos la **Fórmula 4** de manera directa.
$\therefore \int \frac{-3x\,dx}{4x^2+7} = -\frac{3}{8} \ln\lvert 4x^2+7\rvert + c$	Sustituimos u para finalizar.

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2} =$$

Desarrollo	Justificación
$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2} = \int (x^2+x-2)^{-1}(2x+1)dx$	Puedes usar cualquiera de las dos formas, según te parezca más cómodo y sencillo.
$u = x^2+x-2$	Identificamos u conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = 2x+1$ $\frac{du}{2x+1} = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2} = \int \frac{2x+1}{u} \cdot \frac{du}{2x+1}$	Sustituimos x^2+x-2 y dx respectivamente. Observa que $2x+1$ se conserva, pero habrá que reducirse con el denominador de du, que coincide con una expresión igual y podrán cancelarse.
$\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2} = \int \frac{du}{u}$	Reducimos $\frac{2x+1}{2x+1}$.
$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	Aplicamos la **Fórmula 4** de manera directa.
$\therefore \int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2} = \ln\lvert x^2+x-2\rvert + c$	Sustituimos u para finalizar.

Tal y como lo revisamos en la lección anterior, puedes comprobar cada uno de los resultados obtenidos, ya que si los derivas, obtendrás como respuesta el integrando del ejercicio.

Practicando

Resuelve las siguientes integrales y comprueba tus resultados.

Ejercicio	Comprobación
$\int \frac{10\,dx}{3x} =$	$F(x) =$ $F'(x) =$
$\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{9x^2+2}} =$	$F(x) =$ $F'(x) =$
$\int \left(\frac{3}{8}x - 10\right)^5 dx =$	$F(x) =$ $F'(x) =$
$\int \frac{dx}{(1-4x)^{3/2}} =$	$F(x) =$ $F'(x) =$
$\int \frac{12x^3\,dx}{2x^4-7} =$	$F(x) =$ $F'(x) =$

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo diferenciar correctamente cuándo utilizar la fórmula 3 y cuándo la 4.		
Identifico con facilidad el elemento u en un ejercicio de integración.		
Determino correctamente la derivada del elemento u con respecto a x.		
Puedo determinar correctamente el diferencial dx.		
Logro obtener correctamente la integral indefinida de una función algebraica empleando las fórmulas 3 y 4.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

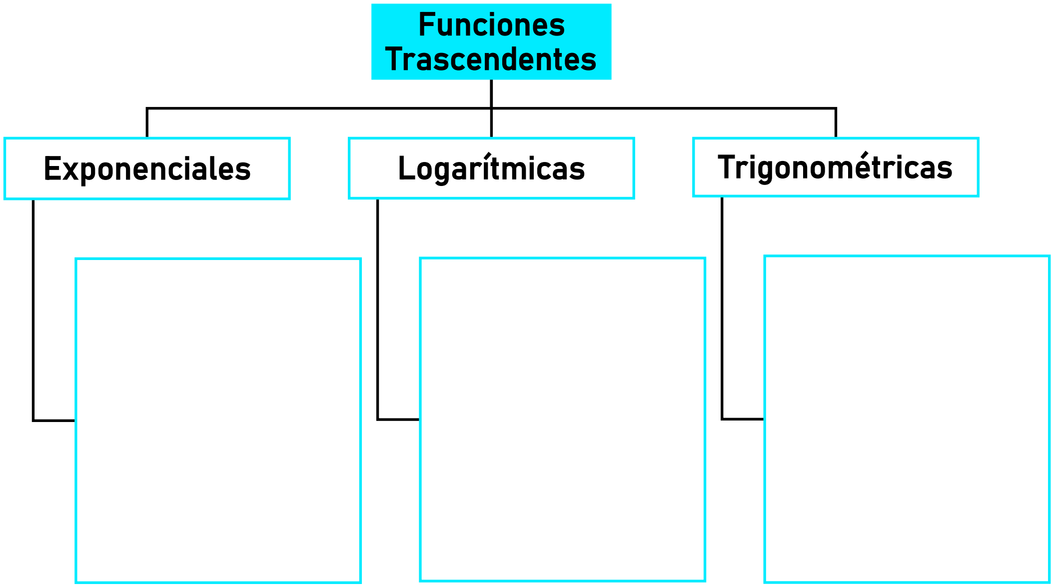
- Julio Profe, Integración por sustitución: ejercicio 5, disponible en: https://youtu.be/x0BWRve12Rk
- Vitual Preparatoria, Integrales por cambio de variable o sustitución, disponible en: https://youtu.be/5Ej7FPMxmPA

Lección 7. Integrales indefinidas: Exponenciales y Trigonométricas

Explorando

Identifica funciones exponenciales y trigonométricas y clasifica las siguientes funciones trascendentes en de acuerdo con el diagrama.

- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -6\operatorname{sen}(x^2)$
- $\boldsymbol{y} = 5^x$
- $\boldsymbol{y} = e^{-9x^6}$
- $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)$
- $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\cot(-x)}{5}$
- $\boldsymbol{y} = \frac{3}{4}\log_2 8x$
- $\boldsymbol{y} = \tan(3x^2 + 7)$
- $\boldsymbol{y} = \frac{9}{5}\mathrm{e}^{5x-1}$
- $\boldsymbol{y} = 7^{\sqrt{x-4}}$
- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 8\sec(5 - x^2)$
- $\boldsymbol{y} = -\frac{10}{9}\csc\left(\frac{1}{x^3}\right)$
- $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = -\ln x^6$



Comprendiendo

Integrando funciones Exponenciales y Trigonométricas

Para determinar la integral indefinida para este tipo de funciones, será por medio del empleo de fórmulas directas, tal y como lo has venido realizando desde las 2 lecciones anteriores. Incluso, gracias a la experiencia que has adquirido hasta este punto, el proceso te resultará familiar y sencillo.

Pero para ello es necesario considerar las siguientes fórmulas, las cuales te recomendamos transcribir en un documento aparte o en tu cuaderno, para que las consultes con facilidad cuando las requieras.

Fórmulas de integración directa para funciones exponenciales y trigonométricas:

De inicio, es necesario recordar que para que una función trascendente sea Exponencial, es necesario que la variable independiente, es decir, $\boldsymbol{x}$, figure en el exponente de alguna constante; por ejemplo: $\boldsymbol{8^{6x}}$, $\boldsymbol{2^{\sqrt{x-8}}}$, $\boldsymbol{e^{-3x^2}}$, por mencionar algunos. Y para integrar este tipo de funciones, tendremos como opciones 2 fórmulas a elegir:

Fórmulas para funciones Exponenciales	
1. $\int \boldsymbol{e^u\,du} = e^u + c$	**2.** $\int \boldsymbol{a^u\,du} = \dfrac{a^u}{\ln a} + c \quad para\ a > 0\ y\ a \neq 1$

Observa que la **Fórmula 1** se utilizará para cuando la base de la función exponencial corresponda al número de Euler $\boldsymbol{e}$, mientras que la **Fórmula 2** para los casos en que la base de la función exponencial sea una constante $\boldsymbol{a}$, pero mayor a cero (positiva) y diferente de 1. Para ambos casos, nota que la variable $\boldsymbol{u}$ figura como el exponente, y es ahí donde tenemos que encontrar la presencia de la variable independiente $\boldsymbol{x}$.

Por otra parte, en lo que respecta a las funciones trascendentes Trigonométricas, para identificarlas basta con notar la presencia de las funciones seno (**sen**), coseno (**cos**), tangente (**tan**), cotangente (**cot**), secante (**sec**) y cosecante (**csc**), y con su respectivo argumento, tal y como puede apreciarse en esta otra tabla de fórmulas para integración directa:

Fórmulas para funciones Trigonométricas	
1. $\int \mathbf{sen}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = -\cos u + c$	6. $\int \mathbf{csc}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + c$
2. $\int \mathbf{cos}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \operatorname{sen} u + c$	7. $\int \mathbf{sec}^2\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \tan u + c$
3. $\int \mathbf{tan}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \ln\lvert\sec u\rvert + c$	8. $\int \mathbf{csc}^2\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = -\cot u + c$
4. $\int \mathbf{cot}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + c$	9. $\int \mathbf{sec}\,\boldsymbol{u}\ \mathbf{tan}\,\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{du} = \sec u + c$
5. $\int \mathbf{sec}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{du} = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + c$	10. $\int \mathbf{csc}\,\boldsymbol{u}\ \mathbf{cot}\,\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{du} = -\csc u + c$

Nota que aquí la variable $\boldsymbol{u}$, hace referencia al argumento de la función trigonométrica, y que su implementación es con el fin de simplificar los procedimientos. Pero antes de comenzar a revisar algunos ejemplos, te recomendamos que cada que se te presente una integral para una función **Exponencial** o **Trigonométrica**, primero identifiques la fórmula de las tablas anteriores que, por su similitud en estructura y forma, te ayudará a resolver el ejercicio. Asimismo, será esencial que también identifiques la expresión que aluda a la variable $\boldsymbol{u}$, ya que la manera en cómo obtendremos la integral, es por el *método de sustitución o cambio de variable*, que se manejó desde la **Lección 6**, veamos:

$\int 7\sec^2(5x)\,dx =$	
Fórmula a utilizar: Trigonométrica 7	
Desarrollo	**Justificación**
$u = 5x$	Una vez seleccionada la fórmula adecuada, identificamos $\boldsymbol{u}$ conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = 5$ $\frac{du}{5} = dx$	Se deriva $\boldsymbol{u}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, y despejamos $\boldsymbol{dx}$.
$\int 7\sec^2(5x)\,dx = \int 7\sec^2 u \cdot \frac{du}{5}$	Sustituimos $5x$ y $\boldsymbol{dx}$ respectivamente.
$\int 7\sec^2 u \cdot \frac{du}{5} = \frac{7}{5}\int \sec^2 u\ du$	Aplicamos la **Propiedad 1** de integrales indefinidas, para ubicar las constantes 7 y $1/5$ antes del símbolo de integración.
$\frac{7}{5}\int \sec^2 u\ du = \frac{7}{5}\tan u + c$	Aplicamos la fórmula correspondiente de manera directa.
$\therefore \int 7\sec^2(5x)\,dx = \frac{7}{5}\tan(5x) + c$	Sustituimos $\boldsymbol{u}$ para finalizar.

$\int -\frac{5}{4} e^{(3x+2)^4}\ (3x+2)^3\ dx =$	
Fórmula a utilizar: Exponencial 1	
Desarrollo	**Justificación**
$u = (3x+2)^4$	Una vez seleccionada la fórmula adecuada, identificamos u conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = 12(3x+2)^3$ $\frac{du}{12(3x+2)^3} = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int -\frac{5}{4} e^{(3x+2)^4}\ (3x+2)^3\ dx =$ $\int -\frac{5}{4} e^{u}\ (3x+2)^3 \frac{du}{12(3x+2)^3}$	Sustituimos $(3x+2)^4$ y dx respectivamente. Observa que $(3x+2)^3$ se conserva, pero habrá que reducirse con el denominador de du, que coincide con una expresión igual y podrán cancelarse.
$\int -\frac{5}{4} e^{u} \cdot \frac{du}{12} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{12} \int e^{u}\ du$ $= -\frac{5}{48} \int e^{u}\ du$	Aplicamos la **Propiedad 1** de integrales indefinidas, para ubicar las constantes $-{}^{5}/_{4}$ y ${}^{1}/_{12}$ antes del símbolo de integración, y reducimos operaciones.
$-\frac{5}{48} \int e^{u}\ du = -\frac{5}{48} e^{u} + c$	Aplicamos la fórmula correspondiente de manera directa.
$\therefore \int -\frac{5}{4} e^{(3x+2)^4}\ (3x+2)^3\ dx = -\frac{5}{48} e^{(3x+2)^4} + c$	Sustituimos u para finalizar.

$\int 9^{4x^2+1}\ 6x\,dx =$	
Fórmula a utilizar: Exponencial 2	
Desarrollo	**Justificación**
$u = 4x^2 + 1$	Una vez seleccionada la fórmula adecuada, identificamos u conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = 8x$ $\frac{du}{8x} = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int 9^{4x^2+1}\ 6x\,dx = \int 9^u\ 6x \cdot \frac{du}{8x}$	Sustituimos $4x^2 + 1$ y dx respectivamente. Observa que $6x$ se conserva, pero habrá que reducirse con el denominador de du.
$\int 9^u \cdot \frac{3}{4} du = \frac{3}{4} \int 9^u\ du$	Aplicamos la **Propiedad 1** de integrales indefinidas, para ubicar la constante $^3/_4$ antes del símbolo de integración.
$\frac{3}{4} \int 9^u\ du = \frac{3}{4} \cdot \frac{9^u}{\ln 9} + c$	Aplicamos la fórmula correspondiente de manera directa.
$\therefore \int 9^{4x^2+1}\ 6x\,dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{9^{4x^2+1}}{\ln 9} + c$	Sustituimos u para finalizar.

Es importante mencionar que, para este último ejercicio, no es posible efectuar el producto de las constantes **3** y **9** de los numeradores, debido a que 9 se encuentra afectado por una potencia.

$$\int -10\tan\left(\frac{6}{5}x\right)\,dx =$$	
Fórmula a utilizar: Trigonométrica 3	
Desarrollo	**Justificación**
$u = \frac{6}{5}x$	Una vez seleccionada la fórmula adecuada, identificamos u conforme a la estructura de la fórmula.
$\frac{du}{dx} = \frac{6}{5}$ $\frac{5}{6}du = dx$	Se deriva u con respecto a x, y despejamos dx.
$\int -10\tan\left(\frac{6}{5}x\right)\,dx = \int -10\tan u \cdot \frac{5}{6}du$	Sustituimos $\frac{6}{5}x$ y dx respectivamente.
$\int -10\tan u \cdot \frac{5}{6}du = -10 \cdot \frac{5}{6}\int \tan u\,du$ $= -\frac{25}{3}\int \tan u\,du$	Aplicamos la **Propiedad 1** de integrales indefinidas, para ubicar las constantes -10 y $5/6$ antes del símbolo de integración, y reducimos operaciones
$-\frac{25}{3}\int \tan u\,du = -\frac{25}{3}\ln\lvert\sec u\rvert + c$	Aplicamos la fórmula correspondiente de manera directa.
$\therefore \int -10\tan\left(\frac{6}{5}x\right)\,dx = -\frac{25}{3}\ln\left\lvert\sec\left(\frac{6}{5}x\right)\right\rvert + c$	Sustituimos u para finalizar.

La comprobación de los resultados para estos ejercicios se realiza de la misma manera como se ha venido revisando, derivando la respuesta y obteniendo el integrando del ejercicio como respuesta. Probablemente, en algunas situaciones puede llegar a resultar un poco más laborioso, pero no te desanimes, inténtalo.

Practicando

Resuelve las siguientes integrales y elige la opción que responda correctamente al ejercicio.

1. $\int -4\cot(6x^2)\ 2x\,dx =$

a) $-\frac{3}{2}\ln|\text{sen}(6x^2)| + c$ b) $-8\ln|\text{sen}(6x^2)| + c$ c) $-\frac{2}{3}\ln|\text{sen}(6x^2)| + c$

2. $\int 3^{5x+11}\,dx =$

a) $\frac{3^{5x+11}}{\ln 3} + c$ b) $\frac{3^{5x+11}}{5\ln 3} + c$ c) $\frac{3^{5x+11}}{11\ln 3} + c$

3. $\int \frac{1}{6}\sec\left(\frac{1}{9}x\right)\tan\left(\frac{1}{9}x\right)\,dx =$

a) $\frac{1}{6}\sec\left(\frac{1}{9}x\right) + c$ b) $\frac{3}{2}\sec\left(\frac{1}{9}x\right) + c$ c) $\frac{1}{18}\sec\left(\frac{1}{9}x\right) + c$

4. $\int 7\,\text{sen}(-2x)\,dx =$

a) $-\frac{7}{2}\cos(-2x) + c$ b) $-14\cos(-2x) + c$ c) $\frac{7}{2}\cos(-2x) + c$

5. $\int \csc^2\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2\left(\frac{1}{3}x + 4\right)dx =$

a) $-\frac{3}{2}\cot\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2 + c$ b) $-\frac{2}{3}\cot\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2 + c$ c) $-\frac{7}{2}\cot\left(\frac{1}{3}x + 4\right)^2 + c$

6. $\int -e^{9x}\,dx =$

a) $-9e^{9x} + c$ b) $\frac{1}{9}e^{9x} + c$ c) $-\frac{1}{9}e^{9x} + c$

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo diferenciar adecuadamente una función exponencial de una trigonométrica.		
Determino con facilidad qué fórmula de integración utilizar para los casos revisados en esta lección.		
Identifico con facilidad el elemento u en un ejercicio de integración, y así deducir el diferencial dx.		
Logro obtener correctamente la integral indefinida de una función exponencial.		
Logro obtener correctamente la integral indefinida de una función trigonométrica.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Julio Profe, Integración por sustitución: ejercicio 10, disponible en: https://youtu.be/NwFQ6RwidJI
- Matemáticas profe Alex, Integración por sustitución: ejemplo 13 Coseno, disponible en: https://youtu.be/lEatvrWzbiQ
- Math2me, Integral de la función seno, disponible en: https://youtu.be/d3DoW3BaDFM

Lección 8. Integrales indefinidas: otra versión de trigonométricas

Explorando

Resuelve los siguientes ejercicios.

¿Cuál es el resultado de las siguientes integrales?

1. $\int senxdx=$

2. $\int 2cos3xdx=$

3. $\int cos2xdx=$

4. $\int 3tan5xdx=$

Comprendiendo

Recordemos que la integral en su esencia pura es el cálculo del área bajo una función en un intervalo dado (integrales definidas), lo mismo pasa con funciones trigonométricas, pero en este caso se trata de integrales indefinidas, por tanto, hablamos del área total debajo de dicha función.

Una integral se denomina trigonométrica cuando su integrando está compuesto por una función trigonométrica y constantes.

Para lograr comprender mejor esto es importante conocer la relación que existe entre la derivada y la integral (*antiderivada*) de funciones trigonométricas básicas.

Analiza la siguiente tabla.

Función f(x)	Derivada	Integral
Sen v	v´Cos v	-Cos v +C
Cos v	- v´Sen v	Sen v + C
Tan v	Sec^2v	-ln$\lvert Cosv \rvert$+C ó ln$\lvert Senv \rvert$+C

Donde la **v** funciona como el argumento de la función

Ejemplo:

Para **f(x)=Sen7x** el valor de **v =7x**

En este caso

La derivada del **Sen v** está dada por: v´Cos v

La derivada de **f(x)=Sen7x** es **f´(x)=7Cos7x**

Como puedes observar para la derivada de una función trigonométrica solo se multiplica por la derivada del argumento de dicha función operando la fórmula de derivación correspondiente y la manera más sencilla de obtener la integral de la misma función es solo de dividiendo entre la derivada del argumento y operando de igual forma con la fórmula de integración trigonométrica correspondiente.

La integral $\int \boldsymbol{Sen7x\,dx}$ esta dada por **-Cos v +C**

Por lo tanto, de manera directa la integral seria: $\frac{-Cos7x}{7} + C$ ya que la derivada del argumento es 7.

Nota: Recuerda que antes de resolver cualquier integral puedes extraer de la integral las constantes del coeficiente de dicha función y al final queda multiplicando al resultado.

Practicando

Resuelve lo que a continuación se pide:

1. **En la integral:** $\int \boldsymbol{10sen3x^2\,dx}$

¿Cuál es el argumento?

¿Qué se podría extraer de la integral?

¿Cuál es la derivada del argumento?

¿Cuál es el resultado de la integral?

2. En la integral: $\int \frac{cos4x}{3}\, dx$

¿Cuál es el argumento?

¿Qué se podría extraer de la integral?

¿Cuál es la derivada del argumento?

¿Cuál es el resultado de la integral?

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de operar las fórmulas de integración trigonométrica		
Puedo identificar las constantes a extraer de una integral		
Soy capaz de resolver una integral trigonométrica		
Puedo comprobar el resultado de una integral al derivar mi resultado.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Profe Rodolfo Youtuber. Integral Indefinida. Cálculo Integral. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=yOvAVeRDWE&ab_channel=PROFERODOLFOYOUTUBER

- Academia Minier. Integral indefinida (Ejemplo 1). Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=CyZu4598sD4&ab_channel=AcademiaMinier

Lección 9. Integrales indefinidas:
Usando identidades trigonométricas.

Explorando

Resuelve los siguientes ejercicios.

¿Cuál es el resultado de las siguientes integrales?

1. $\int cos3xdx$

2. $\int sen4xdx$

3. $\int 2sen4xdx=$

Comprendiendo

Es importante tener muy claro la resolución de estas integrales ya que al utilizar identidades trigonométricas las estaremos ocupando, esto porque tenemos ahora que resolver integrales con funciones de segundo y tercer grado, pero no hay porque preocuparnos en esta lección abordaremos ejercicios de una manera muy sencilla.

Una vez más, no podemos perder de vista esa relación directa entre derivada e integral (antiderivada), y para funciones trigonométricas es de vital importancia que domines por lo menos las 2 básicas: sen u y cos u como base para encontrar a las demás utilizando elementos algebraicos básicos.

Y en el caso de integrales con funciones como sen^2u y cos^2u considera sus identidades para poder dar solución:

Función f(x)	Identidad
Sen^2u	½-1/2cos2u
Cos^2u	½+1/2cos2u

Donde la u es el argumento y siempre debe estar dado en radianes.

Ejemplo:

Para resolver: $\int sen^2xdx$

Utilizamos la identidad: Sen^2u=½-1/2cos2u

Y en vez de poner Sen^2x ponemos su respectiva identidad: =½-1/2cos2u

Y tenemos: $\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x)dx$

Con esto tenemos ya una integral mucho más sencilla y la podemos resolver directamente, o si dominas cambio de variable la puedes usar también.

Entonces tenemos una resta en la integral resultante, por tanto podemos separar la integral:

$\int \frac{1}{2}dx - \int \frac{1}{2}cos2xdx$ Sacamos las constantes de la integral

$$\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2xdx$$

Y finalmente resolvemos:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + c}$$

Nota: Como puedes observar, estos ejercicios son muy sencillos te recomiendo que utilices GeoGebra para argumentar tus respuestas www.geogebra.org es muy ligero y rápido de instalar.

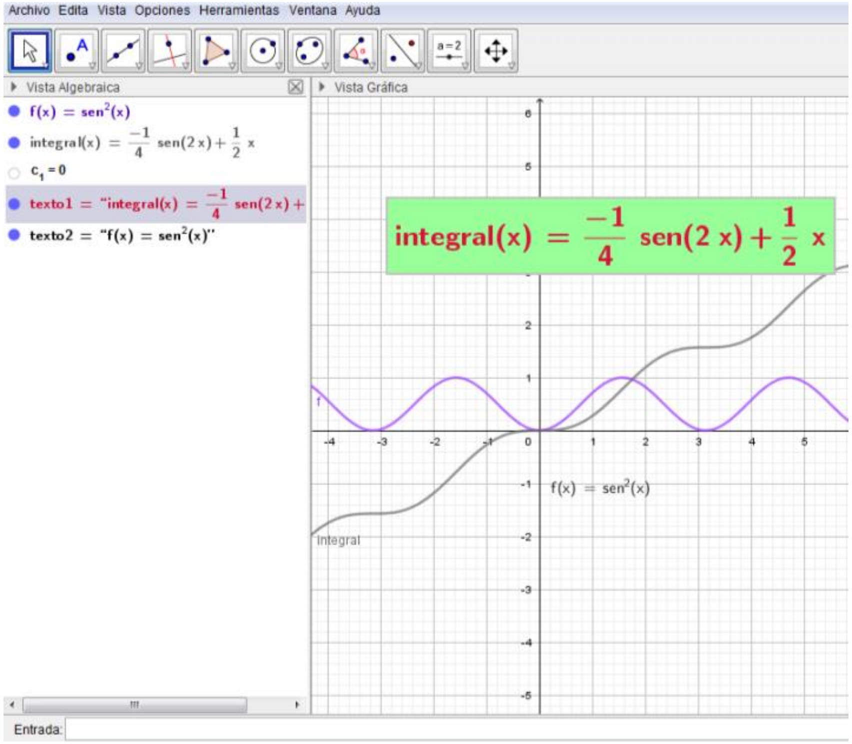
Importante: Recuerda que, aunque tengas funciones de grado 3,4, 5,6 etc.

Tú las puedes simplificar y con ello usar las identidades trigonométricas para poder resolver cualquier integral.

Toma en cuenta que existen muchas identidades que te ayudaran a resolver integrales trigonométricas aparentemente complicadas.

Comprobación:

Argumentación de tu resultado con GeoGebra.



Practicando

Resuelve lo que a continuación se pide.

1. En la integral: $\int 2cos^2x\,dx$

¿Se puede resolver directamente?

¿Qué se podría extraer de la integral?

¿Cuál es el resultado?

¿Argumenta tu respuesta en GeoGebra?

2. **En la integral:** $\int \frac{2sen^2xdx}{6}$

¿Se puede resolver directamente?

¿Qué se podría extraer de la integral?

¿Cuál es el resultado?

¿Argumenta tu respuesta en GeoGebra?

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de operar las fórmulas de integración trigonométrica		
Puedo identificar las constantes a extraer de una integral		
Soy capaz de simplificar una función usando cualquier identidad		
Puedo comprobar el resultado de una integral con GeoGebra		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Matefacil 2016. 134. Integral de seno al cuadrado de x (con identidad trigonométrica) Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=WcY8X21to68&ab_channel=MateFacil

- Profe Rodolfo Youtuber . 2017. (1) Integral Indefinida. Cálculo Integral. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=yOvAVeRDWE&ab_channel=PROFERODOLFOYOUTUBER

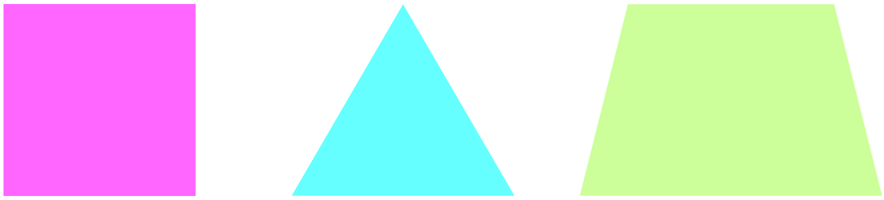
- Academia Minier 2018. Integral indefinida (Ejemplo 1). Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=CyZu4598sD4&ab_channel=AcademiaMinier

Lección 10. Integrales definidas

Explorando

Resuelve los siguientes ejercicios.

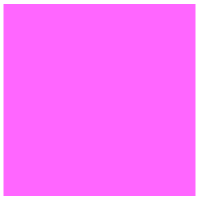
1. De las siguientes figuras escribe la fórmula para calcular el área y el perímetro de cada.



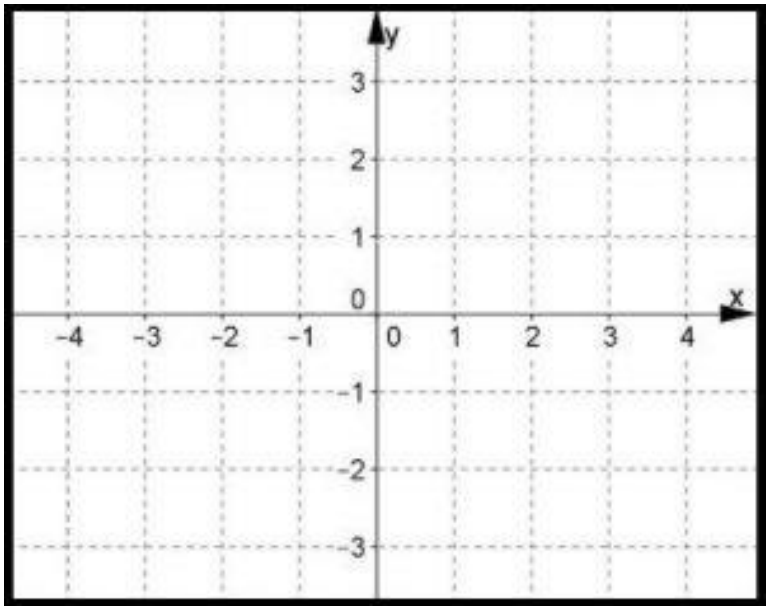
	Cuadrado	Triángulo	Trapecio
Área			
Perímetro			

	Pentágono	Círculo
Área		
Perímetro		

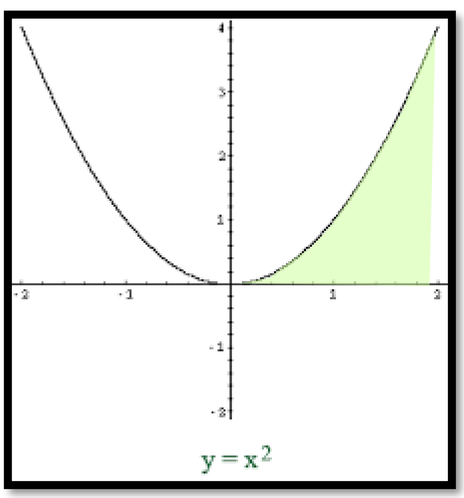
2. El lado de un cuadrado que mide $(3x + 2)$ de lado, determina su área y perímetro.



3. Encontrar el área que se encierra dentro de las siguientes funciones: x=-1, x=3, y=2 y el eje de las abscisas



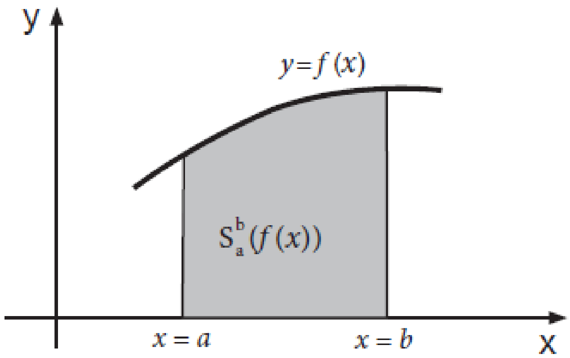
4. De la siguiente función que está graficada, menciona dos ideas para calcular el área sombreada



Comprendiendo

Ocuparemos un lenguaje y simbología que más adelante precisaremos.

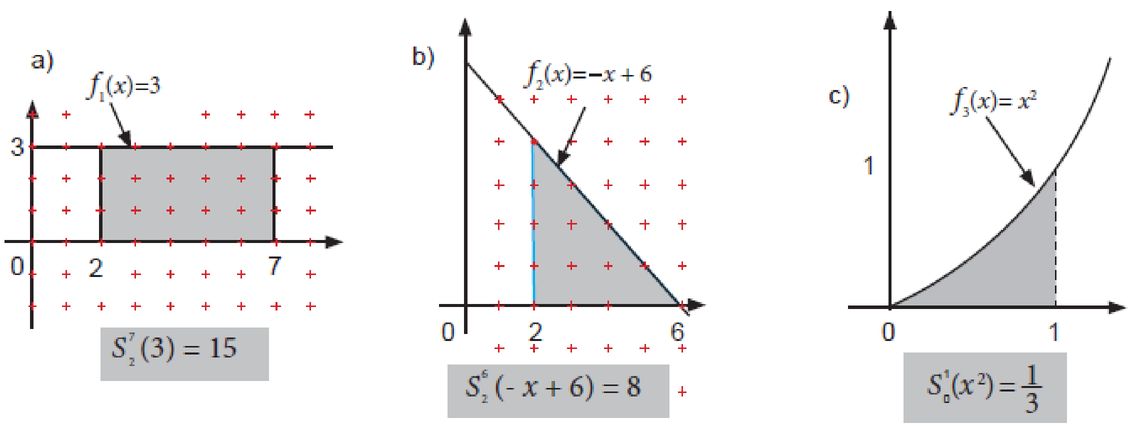
De la siguiente figura podemos deducir que: si una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$, existe un área que se comprende entre el eje $\boldsymbol{x}$, una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y las rectas $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.



Podemos establecer lo siguiente: el área comprendida entre a y b

$$\boldsymbol{S_a^b}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

Lo anteriormente establecido se puede ejemplificar en las siguientes figuras, donde esta nueva notación para el área de figuras elementales conocidas por ti, son los siguientes ejemplos.



Si observas son figuras que ya conoces y sabes obtener el área sombreada. Sin embargo, en la figura C, se complica obtener de forma directa el área debido que esta función al ser de segundo grado y graficarla, se va formando una curva.

Para resolver los tres incisos recurriremos a los temas aprendidos en lecciones anteriores como “la integral indefinida”. Por lo tanto, en la figura “a” sabemos que, para determinar el área de un rectángulo multiplicamos la base por la altura en este caso sabemos que la base mide cinco y la altura mide tres, lo que significa que tenemos 15 u^2.

Pero si empleamos la integral indefinida con los antes establecido, nos queda:

$$S_2^7(3) = \left[\int 3dx\right]_2^7 = [3x + c]_2^7 = \lfloor 3(7) + c\rfloor - \lfloor 3(2) + c\rfloor = 15$$

Si analizamos las operaciones lo que estamos haciendo es establecer intervalos cerrados

Ahora en el inciso "b" se trata del área de un triángulo de base cuatro (6-2=4) y altura cuatro. De la misma forma que en el inciso anterior calculamos el área (base por altura sobre dos), que en este caso es:

$$\frac{4x4}{2} = 8$$

$$S_2^6(-x+6) = \left[\int (-x+6)dx\right]_2^6 = \left[\frac{-x^2}{2} + 6x + c\right]_2^6$$

$$= \left\lfloor \frac{-(6)^2}{2} + 6(6) + c\right\rfloor - \left\lfloor \frac{-(2)^2}{2} + 6(2) + c\right\rfloor = 8$$

En el inciso "c", el área sombreada es la parte inferior de una parábola de una ecuación $y = x^2$, en un intervalo de 0 a 1.

$$S_0^1(x^2) = \left[\int x^2 dx\right]_0^1 = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_0^1 = \left\lfloor \frac{(1)^3}{3} + c\right\rfloor - \left\lfloor \frac{(0)^3}{3} + c\right\rfloor = 1/3$$

Ahora bien, que estamos adentrándonos en el tema podemos el concepto de integral definida:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo I, se llama integral definida de f desde a hasta b $(a, b \ \in I)$ y se denota como $\int_a^b f(x)dx$ al número.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

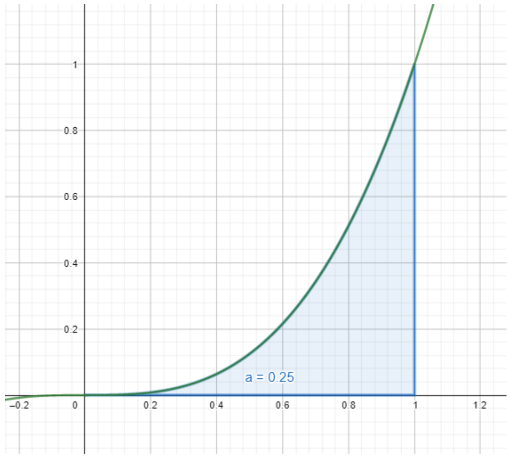
Donde F es una primitiva cualquiera de f, a y b son límites de integración

Ejemplo 1. Calcula la integral definida de la $f(x) = x^3$, en el intervalo de 0 a 1.

Solución: como $F(x) = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$, tendremos que

$$\therefore \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \,/_0^1 = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = 1/4$$

Con lo anterior podemos interpretar que el área debajo de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo 0 a 1 es ¼. La región cuya área estamos postulando es la que aparece sombreada en la siguiente figura.

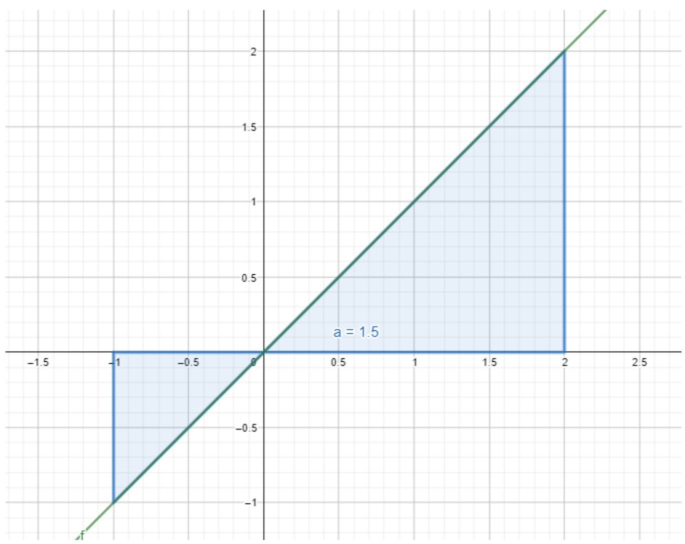


Ejemplo 2. Calcula la integral definida de la función identidad, en el intervalo de -1 a 2.

Solución: Una función identidad es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo:

$$f(x) = x$$

Por lo tanto, podemos establecer que el área que se va a calcular es la que se muestra en la siguiente figura.



Si observas se forman dos triángulos con diferentes limites el primero del lado izquierdo del eje "Y" tiene límites desde -1 hasta 0 y el segundo triangulo del lado derecho del eje de "Y" tiene límites desde 0 hasta 2. Cabe mencionar que ahora se tendrán dos integrales una para el primer triangulo y otra para el segundo y la suma de las áreas resulta el área total de la parte sombreada.

Entonces podemos establecer lo siguiente:

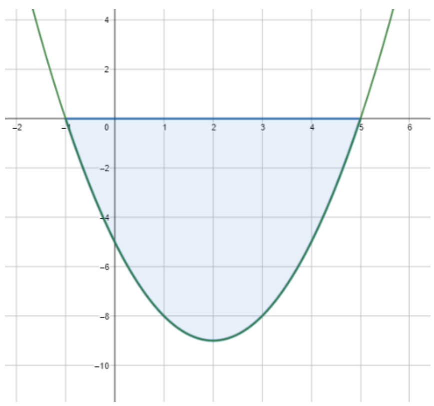
$$F(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{2} x dx = \frac{1}{2}(0^2 - (-1)^2) + \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(4 - 0) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3}{2}u^2$$

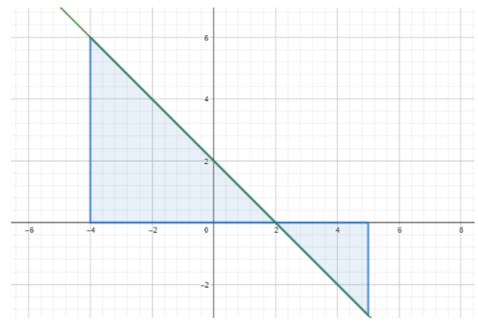
Practicando

Determina las áreas de las regiones sombreadas bajo la curva de cada una de las siguientes funciones con base en su gráfica.

$a)\ f(x) = x^2 - 4x - 5$



$b)\ f(x) = -x + 2$



Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de establecer los límites de integración		
Comprendo el concepto de integral definida		
Soy capaz de calcular el área de una región bajo la función y el eje de las abscisas por medio de una integral definida		
Puedo calcular la integral definida de funciones polinomiales		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy. Integrales definidas: funciones comunes. Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-8c/e/evaluating-definite-integrals-2
- Julio Profe. Integral definida. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY

Lección 11. Área bajo la función

Explorando

Resuelve y evalúa las siguientes integrales indefinidas.

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx$$

$$b) \int \sqrt{x}\, dx$$

$$c) \int \left(4x - \frac{2}{x} + 5sen\, x\right) dx$$

$$d) \int \frac{6x^3 - 5}{x} dx$$

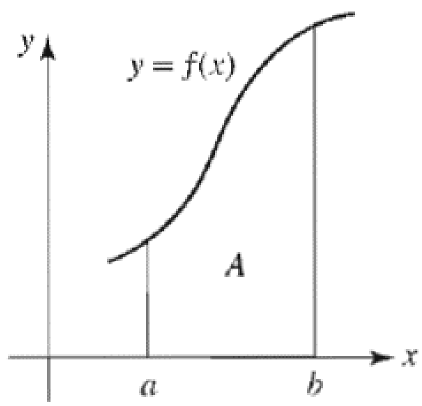
Integral Indefinida	Límite superior	Límite inferior	Resultado
$\int \frac{1}{x^5} dx$	2	1	
$\int \sqrt{x}\, dx$	5	0	

Comprendiendo

Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

- Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua y = f(x) definida sobre un intervalo la, b].

El área de esta región se denomina área bajo la gráfica de f sobre el intervalo [a, b]. El requerimiento de que f sea no negativa sobre [a, b] significa que ninguna parte de esta grafica sobre el intervalo esta por abajo del eje x. Ver la sig. Fig.

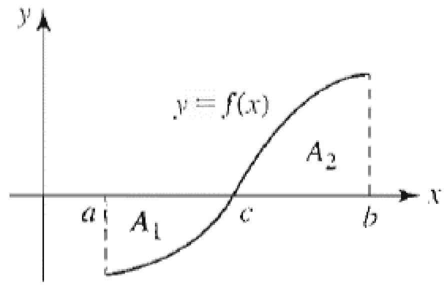


Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre [a, b] entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como se ha mencionado en esta lección y la anterior, el valor de $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como al área neta con signo entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo [a, b]. En esta lección investigaremos problemas de área:

- Encontrar el área total de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo [a, b].

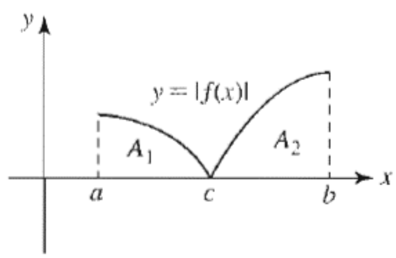
Área total

Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo [a, b] y que $f(x) < 0$ sobre [a, c) y que $f(x) \geq 0$ sobre [c, b]. El área total es el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = f(x)$, que es no negativa para toda x en [a, b]. Recuerda que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la figura siguiente, donde $f(x) < 0$ sobre le intervalo [a, c) y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo [c, b]. Por tanto,



$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & para\ f(x) < 0 \\ f(x), & para\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Como se muestra en la siguiente figura, la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo [a, c) se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Sobre el intervalo [c, b], donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el area total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura, usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida



$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c (-f(x))dx + \int_c^b f(x)dx$$

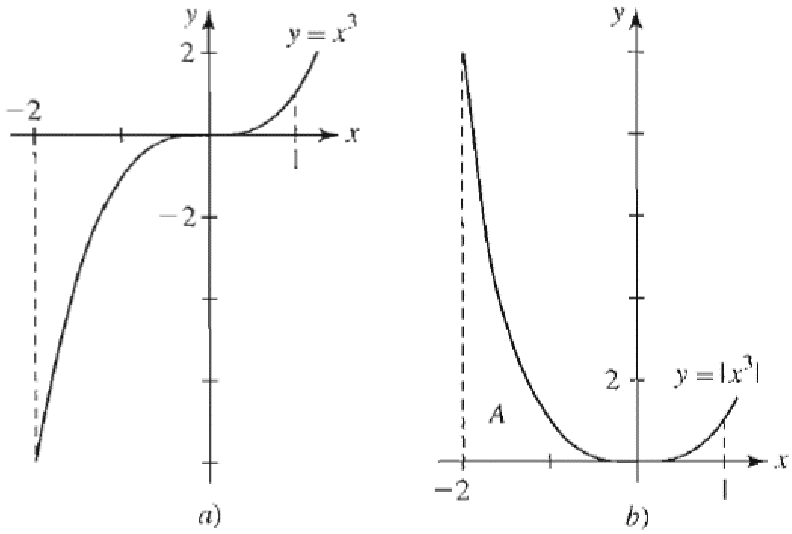
$$\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2$$

Ejemplo 1, Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre [-2, 1].

Solución

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3|dx$$

En la siguiente figura comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = x^3$. Puesto que $x^3 > 0$ para $x < 0$, se tiene sobre [-2, 1],



y

Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, según la definición, el área que se busca es

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3| dx = \int_{-2}^{0} |x^3| dx + \int_{0}^{1} |x^3| dx = \int_{-2}^{0} (-x^3) dx + \int_{-2}^{1} x^3 dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{0} + -\frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} = 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}$$

Practicando

Determina las áreas de las regiones acotada por la gráfica de la funci6n dada y el eje x en el intervalo dado.

$y = x^2 - 1 \quad [-1, 1]$

$y = x^3 - 3x^2 + 2; \quad [0, 2]$

Auto evaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de calcular el área de una función dada.		
Comprendo el concepto de área total		
Soy capaz de calcular el área de una región bajo la función y el eje de las abscisas por medio de una integral definida		
Podría calcular el área definida de funciones trascendentes		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		

Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy. El área entre una curva y el eje x. Disponible en: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-applications-of-integration-new/ab-8-4/v/evaluating-simple-definite-integral
- Julio profe. Área bajo una curva. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=V7WnsXYJZaM

Referencias

- Aurelio Baldor, Geometría y trigonometría 2° edición, Editorial Patria.
  - Conamat. (2010). Cálculo integral. México: Pearson. Prentice Hall . México. [en línea]. Disponible en: https://www.edukations.com/wp-content/uploads/2019/01/Calculo-Integral-conamat-1.pdf (Consultado el día 10 de agosto de 2020).
- Courant, R.; Robbins, H. (2014). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Cuéllar, J. (2008). *Matemáticas VI. Cálculo integral*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Cuevas, M. B. C., Pérez, M. C., Rivera, C. E. (2018), Calculo integral, Ed. Gafra. México D.F.
- Escalante, L. (2020). *Cálculo integral*. Bachillerato Sabes. México: Book Mart.
- Garza Olvera B. (2015). Cálculo integral, Matemáticas V, educación media superior. México: Pearson.
  - Ímaz, C.: Moreno, L. (2014). *Cálculo : su evolución y enseñanza.* México: Trillas.
  - Método exhaustivo. (2020). Wikipedia, La enciclopedia libre [en línea). Consultado el 15 de septiembre de 2020. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9todo_exhaustivo&oldid=129271470
- Ortiz, F., Ortiz, F. & Ortiz, F. (2019). *Cálculo diferencial*. Tercera Ed. México: Patria Educación.
- Salazar, L. (2018). *Cálculo diferencial para bachilleratos tecnológicos*. Segunda Ed. México: Patria Educación.
- Stewart J. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. 6ª. Edición CENGAGE Learning. [en línea]. Disponible en http://colegioparroquialsanluisgonzaga.edu.co/wp-content/uploads/2018/04/Calculo-Una-variable-Stewart-7ed-1.pdf. (Consultado el día 15 de agosto de 2020).
- Yle Martínez A., Juárez Duarte A. & Vizcarra Parra F., (2012). Cálculo integral II. DGEP.

Imágenes tomadas de:

- www.canva.com
- https://www.pngocean.com/
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica)
- GeoGebra (versión 6)